

2027학년도 모의논술고사

자연계열

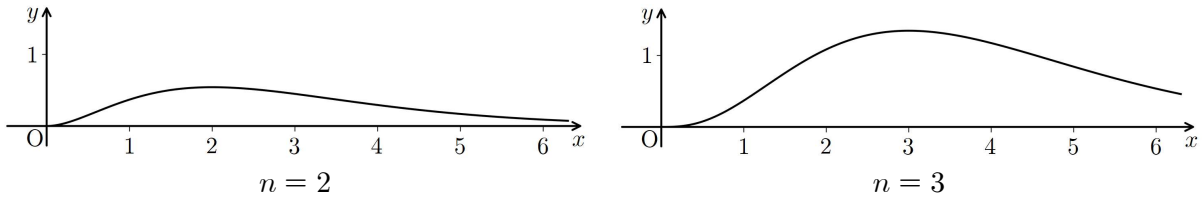


성명	
전형	
수험번호	

[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

【 제시문 】

(가) $n \geq 2$ 인 자연수에 대하여 함수 $f(x) = x^n e^{-x}$ ($x \geq 0$)를 생각하자. [그림 1]은 $n=2$ 와 $n=3$ 인 경우의 곡선 $y=f(x)$ 를 나타낸다.



[그림 1]

곡선 $y=f(x)$ 는 두 개의 변곡점을 가진다. 이때 두 변곡점의 x 좌표를 a_n, b_n (단, $a_n < b_n$)이라고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 는 열린구간 (a_n, b_n) 에서 위로 볼록이고, 열린구간 $(0, a_n)$ 과 (b_n, ∞) 에서 아래로 볼록이다.

(나) 자연수 n 에 대하여 아래와 같은 n 개의 칸에 각각 1 또는 -1 을 적은 것을 ‘기록’이라 하자.

①	②	③	④	...	②
---	---	---	---	-----	---

이때 만들 수 있는 서로 다른 ‘기록’의 개수는 2^n 이다. 하나의 ‘기록’을 구성하는 숫자들의 합을 ‘기록 값’이라고 정의하고, 이 값을 m 으로 표시하자. 예를 들어 $n=5$ 일 때 아래의 ‘기록값’은

1	-1	1	1	-1
---	----	---	---	----

$m = 1 + (-1) + 1 + 1 + (-1) = 1$ 이다.



2027학년도 자연계열 모의논술고사 자연계열

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (5점) 곡선 $y=f(x)$ 의 두 변곡점 A, B의 x 좌표 a_n, b_n 과 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 y 좌표로 가지는 곡선 위의 점 C의 x 좌표 c_n 을 구하시오.
- (2) (8점) [문제 1-1]의 (1)과 제시문을 이용하여, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a_n, x=b_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 선분 AC, 선분 CB와 x 축 및 두 직선 $x=a_n, x=b_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_n 보다 크음을 보이고, n 의 값이 한없이 커질 때 수열 $\{S_n\}$ 의 수렴과 발산을 조사하시오.
- (3) (4점) $n \geq 3$ 인 자연수에 대하여 $a_n \geq 1$ 이 성립함을 보이시오.
- (4) (5점) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표 d_n 을 구하시오.
- (5) (8점) [문제 1-1]의 (3), (4)와 제시문을 이용하여, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=a_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 x 축 및 직선 $x=a_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이 T_n 보다 크음을 보이고, n 의 값이 한없이 커질 때 수열 $\{T_n\}$ 의 수렴과 발산을 조사하시오.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (6점) 자연수 n 에 대하여, 가능한 ‘기록값’ m 을 모두 구하시오. 또한 각 m 을 ‘기록값’으로 가지는 서로 다른 ‘기록’의 개수를 m, n 만을 이용하여 나타내시오.
- (2) (14점) n 이 어떤 짝수의 제곱이라고 하자. 이때 이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 의 근이 중근 또는 서로 다른 두 허근이 되는 m 중에서 가장 큰 m 을 ‘기록값’으로 가지는 서로 다른 ‘기록’의 개수를 p_n , 절댓값이 가장 작은 m 을 ‘기록값’으로 가지는 서로 다른 ‘기록’의 개수를 q_n 이라고 하자. n 이 짝수의 제곱으로써 한없이 커질 때 수열 $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ 의 수렴과 발산을 조사하시오.

[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

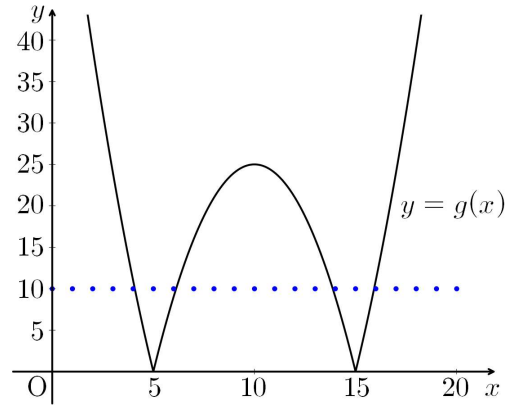
【 제시문 】

(가) 음이 아닌 정수 p 에 대해 함수 $f(x) = (x-p)^2 - 25$ 를 생각하자. 함수 $y = g(x)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & (p-5 < x < p+5) \\ f(x) & (x \leq p-5 \text{ 또는 } x \geq p+5), \end{cases}$$

모든 x 에 대해 $g(x) \geq 0$ 이다.

자연수 k 에 대해 직선 $y = k$ 위의 점 중에서 x 좌표가 0 이상 20 이하의 정수인 점들을 생각하자. 이때 $g(x) > k$ 인 점의 개수를 b_k , $g(x) \leq k$ 인 점의 개수를 c_k 라 하고, $a_k = b_k - c_k$ 라 하자. [그림 2]는 $p = 10$, $k = 10$ 인 경우를 나타낸다. 여기서 $a_{10} = 13$, $b_{10} = 17$, $c_{10} = 4$ 이다.

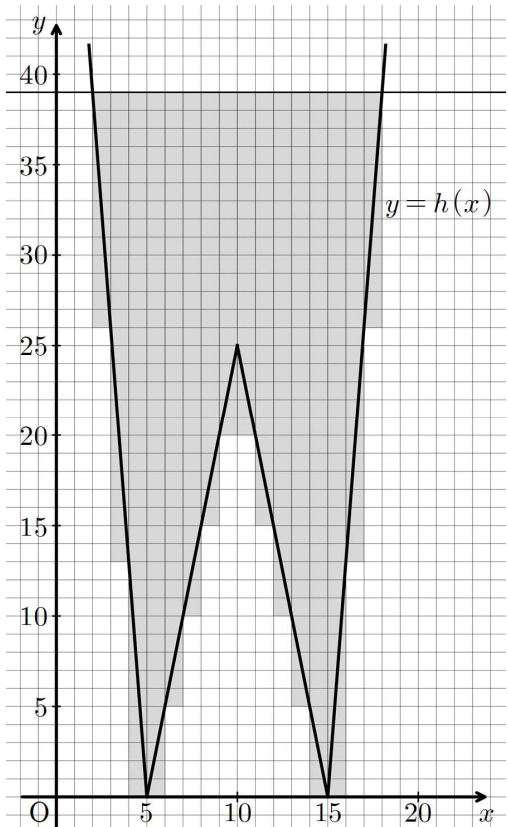


[그림 2]

(나) 모눈종이에는 일정한 간격으로 여러 개의 가로줄과 세로줄이 서로 직각이 되도록 그려져 있어서 바둑판과 같은 격자를 이루고 있다. 가로줄과 세로줄이 만나는 점을 격자점이라 하고, 한 격자점과 바로 옆의 격자점 사이의 거리를 ℓ 이라 하자. 모눈종이의 한 격자점을 원점으로 하고 원점을 지나는 가로줄과 세로줄을 따라 x 축과 y 축을 나타내면, 좌표평면 위의 함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

(가)에서 정의한 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 39$ 의 그래프의 교점을 x 좌표의 값이 작은 순서대로 각각 점 A, E라 하자. 점 $B(p-5, 0)$, $C(p, 25)$, $D(p+5, 0)$ 라 하고 [그림 3]과 같이 점 A, B, C, D, E를 지나면서 열린 구간 $(-\infty, p-5)$, $(p-5, p)$, $(p, p+5)$, $(p+5, \infty)$ 에서 각각 직선인 함수를 $y = h(x)$ 라 하자.

모눈종이 위에 그린 좌표평면에 함수 $y = h(x)$ 와 $y = 39$ 로 둘러싸인 도형을 S 라 하고, S 와 모눈종이의 정사각형이 겹치면 그 정사각형을 색칠하자. (단, 제1사분면에 있는 정사각형만 색칠하고, 정사각형의 변이나 꼭짓점만 겹치는 경우는 색칠하지 않는다.) 이렇게 색칠된 영역을 ‘ S 의 덮개’라고 하자. [그림 3]은 $\ell = 1$, $p = 10$ 일 때, 함수 $y = h(x)$ 와 직선 $y = 39$ 에 대한 ‘ S 의 덮개’를 나타낸 것이다. 이때 ‘ S 의 덮개’에는 한 변의 길이가 ℓ 인 정사각형이 모두 446개 포함되어 있음을 알 수 있다.



[그림 3]



[문제 2-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

(1) (10점) $p = 10$ 에 대하여, 다음 합을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{30} a_k$$

(2) (10점) $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 가 최소가 되도록 하는 정수 p 의 최솟값을 구하시오.

[문제 2-2] (30점) 제시문 (가)와 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (8점) $a_{30} < 0$ 이 되는 정수 p 의 개수를 구하시오.

(2) (10점) [문제 2-2]의 (1)을 만족하는 정수 p 의 최솟값에 대하여, $\ell = 1$ 일 때 ‘ S 의 덮개’에 포함되는 한 변의 길이가 ℓ 인 정사각형의 개수를 구하시오.

(3) (12점) [문제 2-2]의 (1)을 만족하는 정수 p 의 최솟값에 대하여, $\ell = \frac{1}{n}$ 일 때 ‘ S 의 덮개’에 포함되는

한 변의 길이가 ℓ 인 정사각형의 개수를 d_n 이라 하자. 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n^2}$ 을 조사하시오. (단, n 은 자연수)