2026학년도 논술고사

자연계열(약학과)

성 명	
전 형	
수험번호	

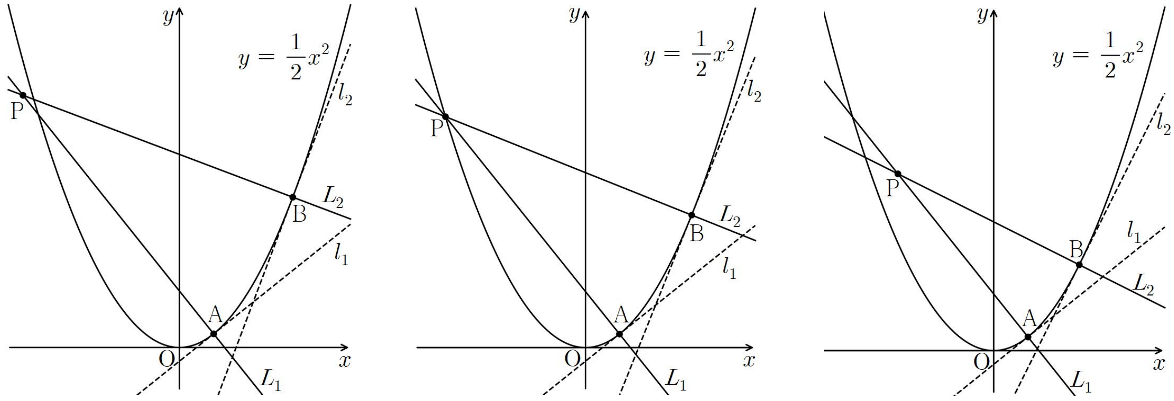
표지를 제외한 페이지 수 : 3

[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

【 제시문 】

(가) 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \frac{1}{2}b^2\right)$을 생각하자. (단, $0<a<b$)

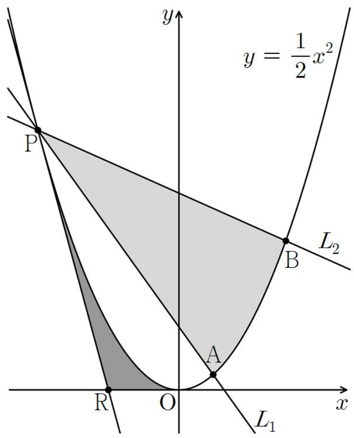
곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 A에서의 접선을 l_1, 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 B에서의 접선을 l_2라 하자. 직선 l_1에 수직이고 점 A를 지나는 직선을 L_1, 직선 l_2에 수직이고 점 B를 지나는 직선을 L_2라 하고, L_1과 L_2의 교점을 P라 하자. 점 A와 점 B의 위치에 따라 점 P의 위치는 [그림 1]과 같이 세 가지 경우로 나뉜다.



(ㄱ) (ㄴ) (ㄷ)

[그림 1]

(나) [그림 1]의 (ㄴ)과 같이 점 P가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점인 경우를 생각하자. 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 P에서의 접선과 x축의 교점을 R이라 하자. [그림 2]에서와 같이 점 P와 점 R을 지나는 직선과 x축 및 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하고, 직선 L_1과 직선 L_2 및 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.



[그림 2]

[문제 1-1] (28점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (9점) $a=3$일 때, 점 P의 y좌표가 가질 수 있는 모든 값의 범위는 $y>\gamma$이다. γ의 값을 구하시오.

(2) (9점) 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 L_1의 교점 중 점 A가 아닌 점을 H라 하자. 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리의 최댓값을 a에 관한 식으로 나타내시오. (단, 점 Q의 x좌표는 점 H의 x좌표보다 크고 a보다 작다.)

(3) (10점) 점 P가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위에 있도록 하는 a와 b 사이의 관계식과 모든 a의 값의 범위를 구하시오.

[문제 1-2] (22점) 점 P가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위에 있을 때, 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (10점) $a=1$일 때, 삼각형 PAB의 외접원을 C라 하자. 원 C의 반지름의 길이와 원 C의 방정식을 구하시오.

(2) (12점) $\lim_{a\to 0+}\frac{S_2}{S_1}$를 조사하시오.

[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

【 제시문 】

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y = g(x)$가 다음 <조건>을 만족시킨다.

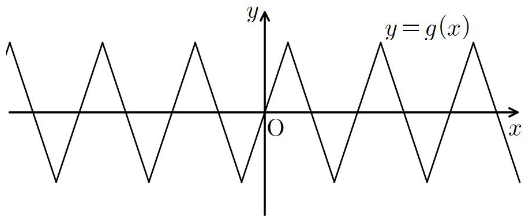
<조건>

자연수 m에 대하여

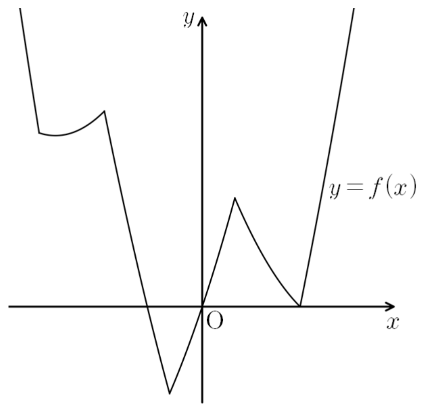
① $g(x) = \begin{cases} mx & \left(-\frac{1}{m} \le x < \frac{1}{m}\right) \\ -mx+2 & \left(\frac{1}{m} \le x < \frac{3}{m}\right) \end{cases}$

② 모든 실수 x에 대하여 $g\left(x+\frac{4}{m}\right) = g(x)$이다.

양의 실수 a와 b에 대하여 $f(x) = ax^2 + bg(x)$라 하자. [그림 3]과 [그림 4]는 $a=1$, $b=1$, $m=3$일 때의 두 함수 $y=g(x)$와 $y=f(x)$의 그래프의 일부를 나타낸다.



[그림 3]



[그림 4]

[문제 2-1] (30점) $a = 2$, $b = 16$, $m = 1$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) (10점) 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = q$의 교점의 개수가 최대가 되도록 하는 모든 정수 q의 값의 합을 구하시오.

(2) (10점) 자연수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = f(n-6)$의 교점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오.

(3) (10점) (2)에서 정의한 a_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - r)$이 수렴할 때, 상수 r의 값과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - r)$의 값을 구하시오.

[문제 2-2] (10점) $b=1$, $m=3$일 때, 모든 양의 실수 p에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y = p$의 교점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

[문제 2-3] (10점) $a = 1$, $b = 1$, $m = 2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y = cx$의 교점의 개수가 최소가 되도록 하는 모든 실수 c의 값의 범위를 구하시오.

2026학년도 논술고사

자연계열(약학과)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 7

2026학년도 자연계열(약학과) 모범답안

자연계열 (약학과)

[문제 1-1]

(1) $y'=x$이므로, $a=3$일 때 l_1의 기울기는 3이고 l_2의 기울기는 b이다. 따라서 L_1의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{2}$이고 L_2의 방정식은 $y=-\frac{1}{b}x+\frac{b^2}{2}+1$이다. 직선 L_1과 L_2의 교점 P의 x 좌표는 $x=-\frac{3b}{2}(b+3)$이다. 따라서,

$$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{11}{2}+\frac{b}{2}(b+3)=\frac{11+b^2+3b}{2}>\frac{29}{2} \qquad (b>a=3)$$

이다. 그러므로, $\gamma=\frac{29}{2}$이다.

[채점 기준]

(1) L_1과 L_2의 방정식을 이용하여 교점 P의 x좌표를 올바르게 구함 [4점]

(2) 점 P의 y좌표에 관한 부등식을 잘 제시함 [3점]

(3) 정답을 올바르게 구함 [2점]

(2) 직선 L_1의 방정식은 $y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}a^2+1$이다. 점 H는 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 L_1의 교점 중 점 A가 아닌 점이므로, 점 H의 x좌표는 방정식 $\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}a^2+1$의 해이다. $x\neq a$이므로 점 H의 x좌표는

$$x=-a-\frac{2}{a} \ \cdots \ ㉠$$

이다. 곡선 위의 점 $\mathrm{Q}\left(q,\frac{1}{2}q^2\right)$ $\left(-a-\frac{2}{a}<q<a\right)$에 대하여, 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리는

$$d=\frac{\left|\frac{q}{a}+\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{2}a^2-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}}=\frac{\left|\frac{a}{2}(q-a)\left(q+a+\frac{2}{a}\right)\right|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{-\frac{a}{2}(q-a)\left(q+a+\frac{2}{a}\right)}{\sqrt{a^2+1}}$$

이다. $f(q)=-\frac{a}{2}(q-a)\left(q+a+\frac{2}{a}\right)$라 하자. 그러면 각 양수 a에 대하여 $f(q)$가 최대일 때 거리 d가 최댓값을 가진다. $f'(q)=-aq-1$이므로 $q=-\frac{1}{a}$에서 극댓값을 가진다. 따라서 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리는 $q=-\frac{1}{a}$일 때 최댓값

$$d=\frac{\frac{a}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{2a}$$

을 가진다.

[채점 기준]

(1) 점 H의 x좌표를 올바르게 구함 [2점]

(2) 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리가 최대가 되는 상황을 관찰 [3점]

(3) 정답을 올바르게 구함 [4점]

(3) 점 P의 x좌표를 $t(<0)$이라 하자. ㉠에 의해 점 A에 대해 $t=-a-\frac{2}{a}$, 점 B에 대해 $t=-b-\frac{2}{b}$를 얻는다. 이로부터 $a+\frac{2}{a}=b+\frac{2}{b}$이고, 이를 통분하여 정리하면

$$\frac{(b-a)(ab-2)}{ab}=0$$

이다. $0<a<b$이므로 $ab=2$, 즉 $b=\frac{2}{a}$이고, $a^2<ab=2$이므로 $0<a<\sqrt{2}$이다.

[채점 기준]
(1) 점P의 x좌표를 a와 b에 대해 각각 표현함 [3점]
(2) a와 b 사이의 관계식을 구함 [4점]
(3) a의 범위를 올바르게 구함 [3점]

[문제 1-2]

(1) 두 점 A, B를 지나는 직선은 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 선분 AB의 중점이 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$이므로, 선분 AB의 수직이등분선 m_1의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{9}{4}$이다. 또한, 두 점 A, P를 지나는 직선은 기울기가 -1이고 선분 AP의 중점이 $\left(-1,\frac{5}{2}\right)$이므로, 선분 AP의 수직이등분선 m_2의 방정식은 $y=x+\frac{7}{2}$이다. 두 직선 m_1, m_2의 교점 $\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$은 원 C의 중심이다. 반지름의 길이는 $\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$과 점 B 사이의 거리이며 $\frac{\sqrt{130}}{4}$이다. 따라서 원 C의 방정식은

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{65}{8}$$

이다.

[채점 기준]
(1) 원의 중심을 올바르게 구함 [5점]
(2) 반지름의 길이를 올바르게 구함 [3점]
(3) 원의 방정식을 올바르게 구함 [2점]

(2)
① 넓이 S_1 구하기

점 P에서의 접선의 방정식은 $y=-\left(a+\frac{2}{a}\right)x-\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)^2$이므로 점 R의 x좌표는 $x=-\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$이다. 따라서

$$S_1 = \int_{-\left(a+\frac{2}{a}\right)}^{-\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)} \left[\frac{1}{2}x^2 + \left(a+\frac{2}{a}\right)x + \frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)^2\right] dx + \int_{-\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)}^{0} \frac{1}{2}x^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)^2 x\right]_{-\left(a+\frac{2}{a}\right)}^{-\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)} + \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)}^{0} = \frac{1}{24}\left(a+\frac{2}{a}\right)^3$$

이다.

② 넓이 S_2 구하기

직선 $x=a$와 직선 L_2의 교점을 E라 하면, 점 E의 좌표는 $\left(a,\ -\frac{a^2}{2}+\frac{2}{a^2}+1\right)$이다.

$$(\text{삼각형 PAE의 넓이}) = \frac{1}{2}\times\left(-a^2+\frac{2}{a^2}+1\right)\times\left(a+a+\frac{2}{a}\right) = \frac{3}{a}+\frac{2}{a^3}-a^3$$

이고

$$\left(a \leqq x \leqq \frac{2}{a}\text{에서 직선 } L_2\text{와 곡선으로 둘러싸인 넓이}\right) = \int_a^{\frac{2}{a}} \left(\frac{2}{a^2}+1-\frac{a}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$= \left[\left(\frac{2}{a^2}+1\right)x - \frac{a}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_a^{\frac{2}{a}}$$
$$= \frac{8}{3a^3}+\frac{5}{12}a^3 - a - \frac{1}{a}$$

이므로

$$S_2 = \left(\frac{3}{a}+\frac{2}{a^3}-a^3\right) + \left(\frac{8}{3a^3}+\frac{5}{12}a^3-a-\frac{1}{a}\right) = \frac{14}{3a^3} - \frac{7}{12}a^3 - a + \frac{2}{a}$$

이다. 따라서

$$\lim_{a\to 0+}\frac{S_2}{S_1} = \lim_{a\to 0+}\frac{\frac{14}{3a^3}-\frac{7}{12}a^3-a+\frac{2}{a}}{\frac{1}{24}\left(a+\frac{2}{a}\right)^3} = 14$$

이다.

[채점 기준]
(1) S_1을 올바르게 구함 [4점]
(2) S_2를 올바르게 구함 [4점]
(3) 극한을 올바르게 계산 [4점]

[문제 2-1]

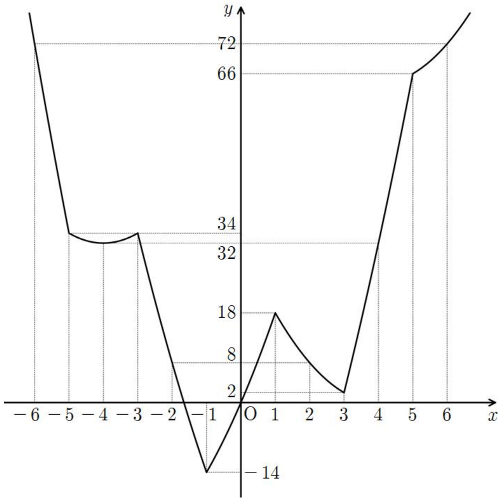
(1) 정수 k에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 16(x-4k), & 4k-1 \leq x < 4k+1 \\ 2x^2 - 16(x-4k) + 32, & 4k+1 \leq x < 4k+3 \end{cases}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다. 각 열린구간 $(4k-1, 4k+1)$에서 $f'(x) = 4x+16$이므로 $x=-4$에서 극소이다. 즉, $k=-1$일 때 열린구간 $(-5,-3)$에서만 극소를 갖고 $k<-1$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하며 $k>-1$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다. 같은 방법으로 각 열린구간 $(4k+1, 4k+3)$에서 에서 $f'(x) = 4x-16$이므로 $x=4$에서 극소이다. 이 경우 $x=4$를 포함하는 구간이 없으므로, $k<1$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하며 $k \geq 1$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다. 따라

서 $x \le -5$에서 함수 $f(x)$는 감소하고 $x \ge 3$이면 함수 $f(x)$는 증가한다. $k=-1$과 $k=0$인 경우만 살펴보면 충분하다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 가]와 같다.



[그림 가]

따라서 직선 $y=q$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 다음 표와 같다.

q	$\cdots$	-14	$\cdots$	2	$\cdots$	18	$\cdots$	32	$\cdots$	34	$\cdots$
개수	0	1	2	3	4	3	2	3	4	3	2

따라서 $2<q<18$과 $32<q<34$에서 교점의 개수가 최대이다. 이를 만족시키는 정수 q의 값의 합은 183이다.

[채점 기준]

(1) $f(x)$의 증감을 이용하여 함수의 성질을 관찰 [4점]

(2) q 값에 따른 교점의 개수를 관찰 [4점]

(3) 정답을 올바르게 계산 [2점]

(2) [그림 가]에 의하여 $a_1=3,\ a_2=3,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=1$이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{5} a_n = 14$이다.

[채점 기준]

(1) $f(x)$의 증감을 이용하여([그림 가]) 함수의 성질을 관찰 [5점]

(2) a_1~a_5의 값을 올바르게 계산 [5점]

(3) [그림 가]에 의하여 a_n의 값은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	3	3	3	4	1	2	3	4	3	3	2

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이므로 $0 = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - r) = 2-r$이다. 따라서 $r=2$이다. (2)의 a_n에 의하여 $n \ge 11$이면 $b_n = 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{10} b_n = \sum_{n=1}^{10}(a_n - 2) = 9$$

이다.

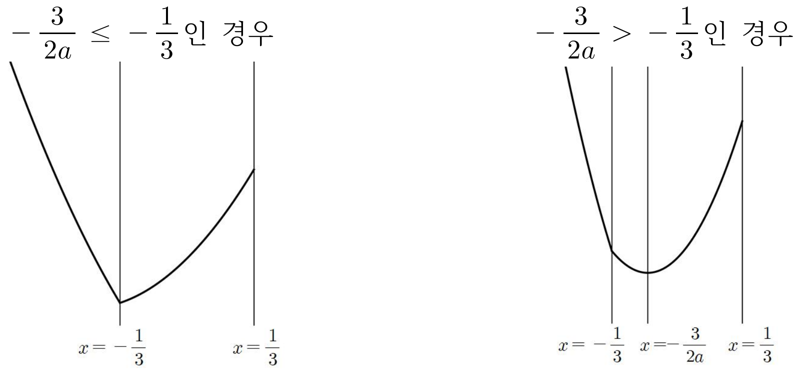
[채점 기준]
(1) $r = 2$임을 관찰 [5점]
(2) 정답을 올바르게 계산 [5점]

[문제 2-2]

정수 k에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3\left(x - \frac{4k}{3}\right), & \frac{4k-1}{3} \le x < \frac{4k+1}{3} \\ ax^2 - 3\left(x - \frac{4k}{3}\right) + 2, & \frac{4k+1}{3} \le x < \frac{4k+3}{3} \end{cases}$$

이다. 닫힌구간 $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$에서 $f(x) = ax^2 - 3x - 2$이므로 $f(-1) = a + 1 > 0$이고 이 구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다. 닫힌구간 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$에서 함수 $f(x) = ax^2 + 3x$이므로 a의 값에 따라 닫힌구간 $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$에서 가능한 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 두 가지 뿐이다. ([그림 나])



[그림 나]

따라서 모든 양의 실수 p에 대하여 직선 $y = p$와 함수 $y = f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 2가 되려면 $x \le -1$에서 함수 $f(x)$가 감소하고 $x \ge \frac{1}{3}$에서 함수 $f(x)$가 증가해야 한다. [문제 2-1]의 (1)과 같은 방법으로 함수의 증가와 감소를 조사하면 각 열린구간 $\left(\frac{4k-1}{3}, \frac{4k+1}{3}\right)$에 대하여 $x \le -\frac{3}{2a}$이면 함수 $f(x)$는 감소하고 $x \ge -\frac{3}{2a}$이면 함수 $f(x)$는 증가한다. 또한 각 열린구간 $\left(\frac{4k+1}{3}, \frac{4k+3}{3}\right)$에 대하여 $x \le \frac{3}{2a}$이면 함수 $f(x)$는 감소하고 $x \ge \frac{3}{2a}$이면 함수 $f(x)$는 증가한다. 그러므로 $-\frac{3}{2a} \ge -1$이고 $\frac{3}{2a} \le \frac{1}{3}$이어야 한다. 따라서 a의 최솟값은 $\frac{9}{2}$이다.

[채점 기준]

(1) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 관찰 [2점]

(1) $x \leq -\frac{3}{2a}$이면 함수 $f(x)$는 감소해야 함을 관찰 [3점]

(2) $x \geq \frac{3}{2a}$이면 함수 $f(x)$는 증가해야 함을 관찰 [3점]

(3) 정답을 올바르게 계산 [2점]

[문제 2-3]

$f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=cx$는 원점에서 만난다. $x \neq 0$이면 방정식 $f(x)=cx$와 $\frac{f(x)}{x}=c$는 같은 해를 가지므로, 함수 $y=\frac{f(x)}{x}$의 그래프와 직선 $y=c$의 교점의 개수를 생각하면 된다.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2(x-2k), & \frac{4k-1}{2} \leq x < \frac{4k+1}{2} \\ x^2-2(x-2k)+2, & \frac{4k+1}{2} \leq x < \frac{4k+3}{2} \end{cases}$$

이므로

$$\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} x+2-\frac{4k}{x}, & \frac{4k-1}{2} \leq x < \frac{4k+1}{2} \\ x-2+\frac{4k+2}{x}, & \frac{4k+1}{2} \leq x < \frac{4k+3}{2} \end{cases}, \ (x \neq 0)$$

이다. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$에서 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$라 하면

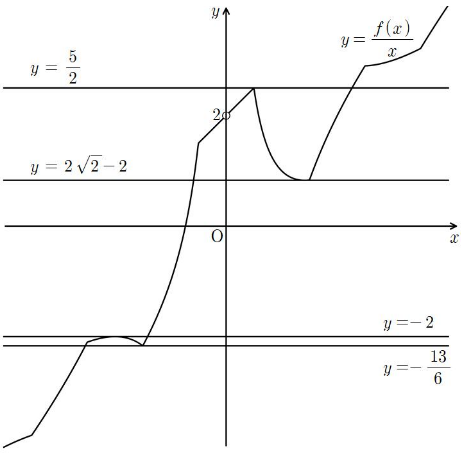
$$g'(x)=\begin{cases} 1+\frac{4k}{x^2}, & \frac{4k-1}{2} < x < \frac{4k+1}{2} \\ 1-\frac{4k+2}{x^2}, & \frac{4k+1}{2} < x < \frac{4k+3}{2} \end{cases}, \ (x \neq 0)$$

이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{5}{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)
$g'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	$-\frac{21}{10}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{13}{6}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$		$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-2$	$\nearrow$	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$

위 표를 이용하여 곡선 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 [그림 다]와 같다.



[그림 다]

따라서 $c < -\frac{13}{6}$, $-2 < c < 2\sqrt{2}-2$, $c > \frac{5}{2}$에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=c$의 교점은 1개이다. 그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=cx$의 교점의 개수는 원점을 포함하여 $c < -\frac{13}{6}$, $-2 < c < 2\sqrt{2}-2$, $c > \frac{5}{2}$에서 2개가 된다.

[채점 기준]

(1) $x \neq 0$이면 방정식 $f(x)=cx$와 $\frac{f(x)}{x}=c$는 같은 해를 가짐을 관찰 [2점]

(2) $\frac{f(x)}{x}$의 증감을 이용하여 함수의 성질을 관찰 [5점]

(3) 정답을 올바르게 계산 [3점]