2026학년도 논술고사

자연계열(오후)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2026학년도 자연계열(오후) 논술고사

자연계열 (오후)

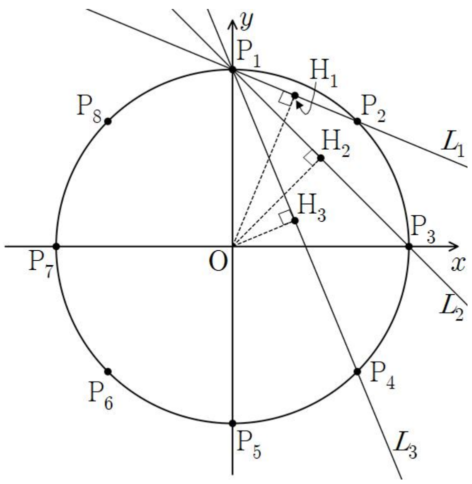
[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

【 제시문 】

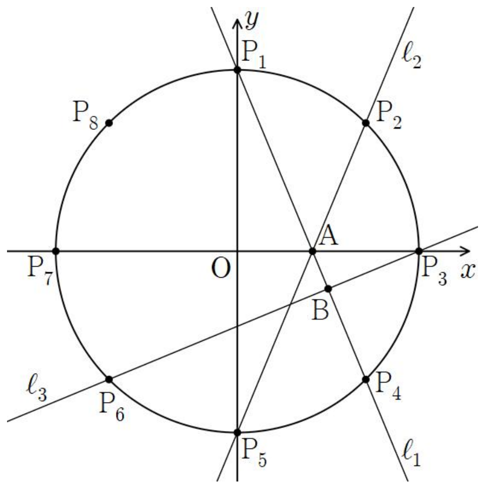
(가) 8 이상의 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$을 생각하자. 이때 점 P_1의 좌표는 $(0, 1)$이고 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_1$을 차례로 이어서 만든 도형은 정$n$각형을 이룬다. 점 P_1과 P_2를 지나는 직선을 L_1, 점 P_1과 P_3을 지나는 직선을 L_2, 점 P_1과 P_4를 지나는 직선을 L_3이라 하자. 이때 원점에서 직선 L_1, L_2, L_3에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라 하자.

점 P_1과 P_4를 지나는 직선을 ℓ_1, 점 P_2와 P_5를 지나는 직선을 ℓ_2, 점 P_3과 P_6을 지나는 직선을 ℓ_3이라 하자. 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 교점을 A, 직선 ℓ_1과 ℓ_3의 교점을 B라 하자.

[그림 1]과 [그림 2]는 $n=8$일 때를 나타낸다.



[그림 1]



[그림 2]

(나) 3 이상의 자연수 n에 대하여 점 $\left(\frac{j}{n}, 0\right)$과 점 $\left(0, \frac{n-j}{n}\right)$를 지나는 직선을 m_j라 하자. (단, j는 n보다 작은 자연수이다.) 직선 m_1과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 s_1, 직선 m_{i-1}과 m_i 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 s_i라 하자. (단, $i = 2, \cdots, n-1$)

[그림 3]은 $n = 8$일 때를 나타낸다.

[그림 3]

[문제 1-1] (25점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (5점) $n=8$일 때, 세 점 H_1, H_2, H_3을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

(2) (8점) $n=10$일 때, 자연수 k에 대하여 점 $\left(0,\ 1-3\left(\frac{2}{9}\right)^k\right)$에서 세 직선 L_1, L_2, L_3에 내린 수선의 발을 모두 지나는 원의 넓이를 S_k라 할 때 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$를 조사하시오.

(3) (12점) $n=12$일 때, 사각형 $\mathrm{P}_2\mathrm{ABP}_3$의 넓이를 구하시오.

[문제 1-2] (25점) 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (10점) $n=16$일 때, 직선 m_8과 직선 $m_j\,(j=1,\ \dots,\ 7,\ 9,\ \dots,\ 15)$의 교점의 x좌표를 각각 p_j라 하자. $\sum_{j=1}^{7} p_j + \sum_{j=9}^{15} p_j$의 값을 구하시오.

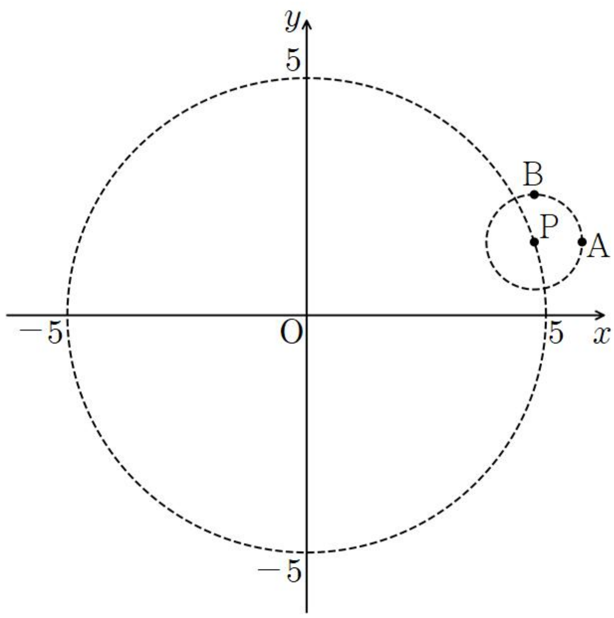
(2) (15점) 3 이상의 자연수 n에 대하여 $T_n = \sum_{j=1}^{n-1} s_j$라 할 때, $\lim_{n\to\infty} T_n$을 조사하시오.

[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

【 제시문 】

(가) 3보다 큰 자연수 k에 대하여, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\dfrac{k}{2}$인 원 C를 생각하자. 양의 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{k}{2}\cos t,\ \dfrac{k}{2}\sin t\right)$는 원 C 위의 점이고, 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 두 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{k}{2}\cos t+\sin 5t,\ \dfrac{k}{2}\sin t+\cos 5t\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{k}{2}\cos t+\cos 5t,\ \dfrac{k}{2}\sin t+\sin 5t\right)$를 생각하자. $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 최대가 되도록 하는 가장 작은 양의 실수 t의 값을 t_1이라 하자.

[그림 1]은 $k=10$, $t=\dfrac{\pi}{10}$일 때 원 C와 점 A, B, P를 나타낸다.



[그림 1]

(나) 일반적으로 $a<x<b$이고 $c<y<d$이면 $a-d<x-y<b-c$가 성립한다. 따라서 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 증가하고 $f(\beta)<g(\alpha)$이면 이 구간의 모든 x에 대해 $f(x)<g(x)$이다.

[문제 2-1] (7점) $k=7$일 때, 점 A와 원점 사이의 거리의 최솟값을 r이라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=r$을 만족시키는 t의 개수를 m, $\overline{\mathrm{OB}}=r$을 만족시키는 t의 개수를 n이라 할 때, mn의 값을 구하시오. (단, $0 \le t \le 2\pi$)

[문제 2-2] (18점) $k=10$, $t=t_1$일 때, 직선 AB가 원 C와 만나는 두 점을 Q, T라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) (8점) $\overline{\mathrm{QT}}^2 = a\left(b-\sin\frac{3}{c}\pi\right)$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 자연수이다.)

(2) (10점) 삼각형 OQT의 넓이를 S_1, 삼각형 OQT를 포함하는 부채꼴 OQT의 넓이를 S_2라 할 때, S_2-S_1의 값을 구하시오.

[문제 2-3] (25점) 다음 물음에 답하시오.

(1) (10점) 직선 OB의 기울기를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하도록 하는 3보다 큰 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

(2) (15점) 좌표평면 위를 움직이는 점 B의 좌표 (x, y)에 대하여 $\frac{dy}{dx}$가 $0<t<\frac{\pi}{2}$인 모든 t에 대하여 정의되도록 하는 10보다 큰 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

※ 대소 비교에 다음 표를 활용하여도 무방함.

t	$\frac{16}{80}\pi$	$\frac{17}{80}\pi$	$\frac{18}{80}\pi$	$\frac{19}{80}\pi$	$\frac{20}{80}\pi$	$\frac{21}{80}\pi$	$\frac{22}{80}\pi$	$\frac{23}{80}\pi$	$\frac{24}{80}\pi$
$\sin t$	0.5878	0.6191	0.6494	0.6788	0.7071	0.7343	0.7604	0.7853	0.8090
$\sin 5t$	0	-0.1951	-0.3827	-0.5556	-0.7071	-0.8315	-0.9239	-0.9808	-1
$\cos t$	0.8090	0.7853	0.7604	0.7343	0.7071	0.6788	0.6494	0.6191	0.5878
$\cos 5t$	-1	-0.9808	-0.9239	-0.8315	-0.7071	-0.5556	-0.3827	-0.1951	0

2026학년도 논술고사

자연계열(오후) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 6

2026학년도 자연계열(오후) 모범답안

자연계열 (오후)

[문제 1-1]

(1) 삼각형 OH_1P_1, OH_2P_1, OH_3P_1은 모두 빗변이 OP_1인 직각삼각형이므로, 점 H_1, H_2, H_3은 지름이 $\overline{OP_1}$인 원 위에 있다. 따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

이다.

[채점 기준]

(1) 점 H_1, H_2, H_3은 지름이 $\overline{OP_1}$인 원 위에 있음을 관찰 [3점]

(2) 원의 방정식을 올바르게 구함 [2점]

(2) 점 Q의 좌표를 $\left(0, 1-3\left(\frac{2}{9}\right)^k\right)$라 하자. [문제 1-1]의 (1)과 같은 방법으로 점 Q에서 직선 L_1, L_2, L_3에 내린 수선의 발을 지나는 원은 지름이 $\overline{QP_1}$인 원이다. 따라서

$$S_k=\pi\left(\frac{1}{2}\times 3\left(\frac{2}{9}\right)^k\right)^2=\frac{9}{4}\left(\frac{4}{81}\right)^k\pi$$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의해

$$\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{\frac{1}{9}\pi}{1-\frac{4}{81}}=\frac{9}{77}\pi$$

이다.

[채점 기준]

(1) 원의 지름이 $\overline{QP_1}$임을 관찰 [2점]

(2) S_k를 올바르게 구함 [3점]

(3) 등비급수의 합을 올바르게 구함 [3점]

(3) 점 A의 좌표는 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$이므로 원점, 점 A, 점 P_3는 한 직선 위에 있다. 삼각형 P_2AP_3의 넓이 T_1은 삼각형 OP_3P_2의 넓이에서 삼각형 OAP_2의 넓이를 뺀 것과 같다. $\overline{OA}=\sqrt{3}-1$이므로

$$T_1=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$$

이다. 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$이므로 $\overline{OB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

이다. 삼각형 ABP_3의 넓이 T_2는 삼각형 OBP_3의 넓이에서 삼각형 OBA의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}(\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{6}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{3})=\frac{9-5\sqrt{3}}{12}$$

이다. 사각형 P_2ABP_3의 넓이는 T_1과 T_2의 합이므로 $\frac{15-8\sqrt{3}}{12}$이다.

[채점 기준]
(1) $\overline{\mathrm{OA}}$ 와 $\overline{\mathrm{OB}}$ 를 올바르게 구함 [4점]
(2) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin\frac{\pi}{12}$를 올바르게 계산 [2점]
(3) T_1과 T_2를 구하여 답을 올바르게 계산함 [6점 / 각 3점]

사인법칙 이용한 풀이?

[채점 기준]
(1) $\overline{\mathrm{OA}}$ 와 $\overline{\mathrm{OB}}$ 를 올바르게 구함 [4점]
(2) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin\frac{5}{12}\pi$를 올바르게 계산 [2점]
(3) T_1과 T_2를 구하여 답을 올바르게 계산함 [6점 / 각 3점]

[문제 1-2]

(1) 직선 m_8과 m_j의 교점의 x좌표를 p_j라 하자. 직선 m_8의 방정식은 $x+y=\frac{1}{2}$, $1 \le k \le 7$인 자연수 k에 대해 직선 m_{8-k}의 방정식은 $\frac{1}{8-k}x+\frac{1}{8+k}y=\frac{1}{16}$, 직선 m_{8+k}의 방정식은 $\frac{1}{8+k}x+\frac{1}{8-k}y=\frac{1}{16}$이다. 이로부터 $p_{8-k}=\frac{8-k}{32}$이고 $p_{8+k}=\frac{8+k}{32}$이다. 따라서 $p_{8-k}+p_{8+k}=\frac{1}{2}$이므로 모든 교점의 x좌표의 합은

$$(p_1+\cdots+p_7)+(p_9+\cdots+p_{15})=(p_1+p_{15})+(p_2+p_{14})+\cdots+(p_7+p_9)=\frac{7}{2}$$

이다.

[채점 기준]
(1) $1 \le j \le 7$일 때 p_j를 구함 [4점]
(2) $9 \le j \le 15$일 때 p_j를 구함 [4점]
(3) 답을 올바르게 계산함 [2점]

(2) 직선 m_i와 m_{i-1}의 교점은 연립방정식

$$\begin{cases} \frac{1}{i}x+\frac{1}{n-i}y=\frac{1}{n} \\ \frac{1}{i-1}x+\frac{1}{n-i+1}y=\frac{1}{n} \end{cases}$$

의 해이므로 교점의 y좌표는 $\frac{(n-i+1)(n-i)}{n^2}$이다. 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2n}\frac{n-1}{n} + \sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{2n}\frac{(n-i+1)(n-i)}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+n-i)-(n^2-n)\right) \\ &= \frac{n-1}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{6}$이다.

[채점 기준]

(1) s_1을 올바르게 계산 [2점]

(2) 교점의 y좌표를 올바르게 계산 [4점]

(3) T_n의 식을 올바르게 구함 [6점]

(4) 극한을 올바르게 계산함 [3점]

[문제 2-1]

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OA}}^2 &= \left(\frac{7}{2}\cos t + \sin 5t\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\sin t + \cos 5t\right)^2 \\ &= \frac{49}{4}(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\sin^2 5t + \cos^2 5t) + 7(\cos t \sin 5t + \sin t \cos 5t) = \frac{49}{4} + 1 + 7\sin 6t\end{aligned}$$

이므로 점 A와 원점 사이의 거리의 최솟값은 $\sin 6t = -1$일 때 $r = \sqrt{\frac{49}{4} + 1 - 7} = \frac{5}{2}$이다. 따라서 $t = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, …, $\frac{\pi}{4} + \frac{5}{3}\pi$일 때 $\overline{\mathrm{OA}} = r$이므로 $m = 6$이다. 같은 방식으로 계산하면 $\overline{\mathrm{OB}}^2 = \frac{49}{4} + 1 + 7\cos 4t$이므로, $\cos 4t = -1$이 되는 $t = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} + \pi$, $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi$일 때 $\overline{\mathrm{OB}} = r$이고 $n = 4$이다. 그러므로 $mn = 24$이다.

[채점 기준]

(1) $\overline{\mathrm{OA}}^2$과 $\overline{\mathrm{OB}}^2$를 올바르게 계산 [3점]

(2) m, n과 정답을 올바르게 구함 [4점 / 각 2점]

[문제 2-2]

(1) 실수 t에 대하여

$$(\sin 5t - \cos 5t)^2 = 1 - (\sin 5t \cos 5t + \cos 5t \sin 5t) = 1 - \sin(5t + 5t) = 1 - \sin 10t$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = 2(\sin 5t - \cos 5t)^2 = 2(1 - \sin 10t)$이다. $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 최대가 되려면 $\sin 10t = -1$이어야 한다. 따라서 $t_1 = \frac{3}{20}\pi$이고, 이때 $\overline{\mathrm{AB}}$는 지름이므로 점 $\mathrm{P}(5\cos t_1, 5\sin t_1)$은 직선 AB 위에 있다. 점 P는 원 C 위의 점이므로 두 교점 중 한 점의 좌표는 $(5\cos t_1, 5\sin t_1)$이며, 이 점을 Q라 하자.

$$\text{직선 AB의 기울기} = \frac{(5\sin t_1 + \sin 5t_1) - (5\sin t_1 + \cos 5t_1)}{(5\cos t_1 + \cos 5t_1) - (5\cos t_1 + \sin 5t_1)} = -1$$

이므로 $\mathrm{T}\left(5\cos\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right), 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right)\right)$이다. 따라서 $\angle \mathrm{TOQ} = \frac{\pi}{5}$이다. 삼각형 OQT에 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{QT}}^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \cos\frac{\pi}{5} = 50\left(1 - \cos\frac{\pi}{5}\right)$$

이다. $\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3}{10}\pi$이므로 $a = 50$, $b = 1$, $c = 10$이다. 그러므로 $a + b + c = 61$이다.

[채점 기준]

(1) t_1의 값을 올바르게 구함 [2점]

(2) $\angle \mathrm{TOQ}$를 올바르게 구함 [2점]

(3) 코사인 법칙을 이용하여 답을 올바르게 구함 [4점]

(2) $\overline{\mathrm{OT}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 5$이고 $\angle \mathrm{TOQ} = \frac{\pi}{5}$이므로, $S_1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin\frac{\pi}{5} = \frac{25}{2}\sin\frac{\pi}{5}$, $S_2 = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{\pi}{5} = \frac{5}{2}\pi$이다. 따라서, $S_2 - S_1 = \frac{5}{2}\pi - \frac{25}{2}\sin\frac{\pi}{5}$이다.

[채점 기준]
(1) S_1을 올바르게 구함 [5점]
(2) S_2를 올바르게 구함 [5점]

[문제 2-3]

(1) $\mathrm{B}\left(\frac{k}{2}\cos t+\cos 5t,\ \frac{k}{2}\sin t+\sin 5t\right)$를 이용하면 $h(t)=\dfrac{\frac{k}{2}\sin t+\sin 5t}{\frac{k}{2}\cos t+\cos 5t}$이다. 몫의 미분법과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$h'(t)=\frac{\left(\frac{k}{2}\cos t+5\cos 5t\right)\left(\frac{k}{2}\cos t+\cos 5t\right)-\left(\frac{k}{2}\sin t+\sin 5t\right)\left(-\frac{k}{2}\sin t-5\sin 5t\right)}{\left(\frac{k}{2}\cos t+\cos 5t\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{k^2}{4}+5+3k\cos 4t}{\left(\frac{k}{2}\cos t+\cos 5t\right)^2}$$

이다. 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\frac{k^2}{4}+5+3k\cos 4t$는 $t=\frac{\pi}{4}$에서 최솟값 $\frac{k^2}{4}+5-3k$를 갖는다. $k\le 2$ 또는 $k\ge 10$에서 $\frac{k^2}{4}+5-3k\ge 0$이며, 이때 함수 $h(t)$는 증가한다. 따라서 3보다 큰 가장 작은 자연수 k는 10이다.

[채점 기준]
(1) $h'(t)$를 올바르게 구함 [4점]
(2) 이차부등식을 풀어서 $h'(t)\ge 0$인 조건을 올바르게 구함 [4점]
(3) 정답을 올바르게 구함 [2점]

(2) 매개변수로 나타낸 함수의 미분법에 따르면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{k}{2}\cos t+5\cos 5t}{-\frac{k}{2}\sin t-5\sin 5t}$$

이다. $g(t)=\frac{k}{2}\sin t+5\sin 5t$라 하자. k가 10보다 큰 자연수이고 문제에 주어진 표를 이용하면 $g\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$임을 알 수 있으므로 $\frac{dy}{dx}$가 $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 정의되기 위한 필요충분조건은 $g(t)>0$이다. 따라서 $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $g(t)>0$ 또는 $\frac{k}{2}\sin t>-5\sin 5t$임을 보이면 된다. $10<k\le 12$인 경우

$$\frac{k}{2}\sin\frac{3}{10}\pi\le 6\sin\frac{3}{10}\pi<-5\sin\left(5\times\frac{3}{10}\pi\right)$$

이므로 $g\left(\frac{3}{10}\pi\right)<0$이다.

$k=13$이라 하자. $0<t\le\frac{\pi}{5}$이면 $\frac{13}{2}\sin t>0\ge -5\sin 5t$이다. 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{5},\ \frac{3}{10}\pi\right]$에서 $\frac{13}{2}\sin t$와 $-5\sin 5t$는 증가한다.

$$-5\sin\left(5\times\frac{\pi}{4}\right)<\frac{13}{2}\sin\frac{\pi}{5},\ -5\sin\left(5\times\frac{21}{80}\pi\right)<\frac{13}{2}\sin\frac{\pi}{4},\ -5\sin\left(5\times\frac{11}{40}\pi\right)<\frac{13}{2}\sin\frac{21}{80}\pi,$$
$$-5\sin\left(5\times\frac{23}{80}\pi\right)<\frac{13}{2}\sin\frac{11}{40}\pi,\ -5\sin\left(5\times\frac{3}{10}\pi\right)<\frac{13}{2}\sin\frac{23}{80}\pi$$

이므로, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{21}{80}\pi\right]$, $\left[\frac{21}{80}\pi,\ \frac{11}{40}\pi\right]$, $\left[\frac{11}{40}\pi,\ \frac{23}{80}\pi\right]$, $\left[\frac{23}{80}\pi,\ \frac{3}{10}\pi\right]$에서 모두 $\frac{k}{2}\sin t>-5\sin 5t$이다. $\frac{k}{2}\sin\frac{3}{10}\pi>-5\sin\left(5\times\frac{3}{10}\pi\right)$이고 열린구간 $\left(\frac{3}{10}\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\frac{13}{2}\sin t$는 증가하고 $-5\sin 5t$는 감소하므로 $\frac{k}{2}\sin t>-5\sin 5t$이다. 그러므로 <조건>을 만족하는 k의 최솟값은 13이다.

[채점 기준]

(1) 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 올바르게 구함 [3점]

(2) $\frac{dy}{dx}$가 $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 정의되기 위한 필요충분조건을 제시함 [2점]

(3) $10<k\le 12$는 성립하지 않음을 관찰 [4점]

(4) $k=13$는 성립함을 관찰 [6점]