2026학년도 논술고사

자연계열(오전)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

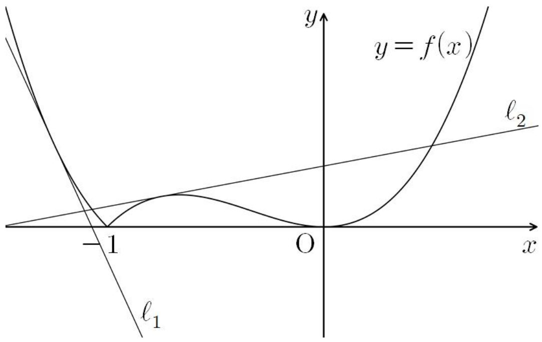
[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

【 제시문 】

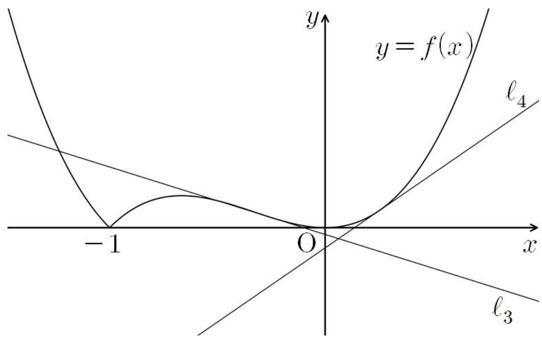
(가) 함수 $y = f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x+1) & (x \geq -1) \\ -x^2(x+1) & (x < -1) \end{cases}$$

양의 실수 $t\,(t \neq 1)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1-t, f(-1-t))$에서의 접선을 ℓ_1, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1+t, f(-1+t))$에서의 접선을 ℓ_2, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-t, f(-t))$에서의 접선을 ℓ_3, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선을 ℓ_4라 하자. 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 교점의 x좌표를 $a(t)$라 하고 직선 ℓ_3과 ℓ_4의 교점을 Q라 하자. 직선 ℓ_3과 x축이 만나는 점을 R, 직선 ℓ_4와 x축이 만나는 점을 V라 하고 삼각형 QVR의 넓이를 $S(t)$라 하자. [그림 1]과 [그림 2]는 $t = \frac{1}{4}$일 때를 나타낸다.



[그림 1]

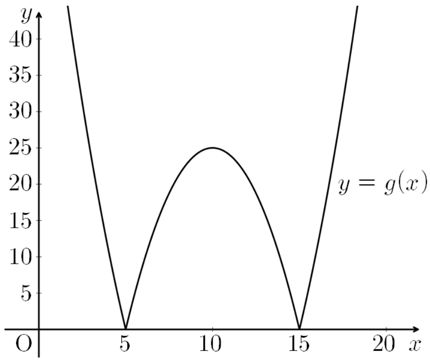


[그림 2]

(나) 음이 아닌 정수 p와 q에 대하여 함수 $y = g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = \begin{cases} q^2 - (x-p)^2 & (p-q < x < p+q) \\ (x-p)^2 - q^2 & (x \leq p-q \text{ 또는 } x \geq p+q) \end{cases}$$

[그림 3]은 $p = 10$, $q = 5$인 경우를 나타낸다.



[그림 3]

(다) 함수 $y = h(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$h(x) = \begin{cases} -5x - 10 & (x < -2) \\ 2x + 4 & (-2 \leq x < 0) \\ -2x + 4 & (0 \leq x < 2) \\ 5x - 10 & (x \geq 2) \end{cases}$$

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (10점) $\lim_{t\to\infty} a(t)$를 조사하시오.

(2) (10점) $\lim_{t\to 0+} \dfrac{S(t)}{t^k}$의 값이 0이 아닌 실수이기 위한 실수 k의 값과 그 극한값을 구하시오.

[문제 1-2] (18점) 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (8점) $p=3$, $q=4$일 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=20$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(2) (10점) $p=10$, $q=5$일 때, 다음 <조건>을 만족시키는 직선의 개수를 구하시오.

<조건>

① 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(6,9)$를 지난다.

② 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점의 개수가 3 이상이고, 이들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 점 P를 포함하여 두 개 이상이다.

[문제 1-3] (12점) 양수 m에 대하여 함수 $y=m|x|$의 그래프와 제시문 (다)의 함수 $y=h(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A(m)$이라 하자. $A(m)$이 최소일 때, m의 값을 구하시오. (단, $0<m<5$)

[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하시오.

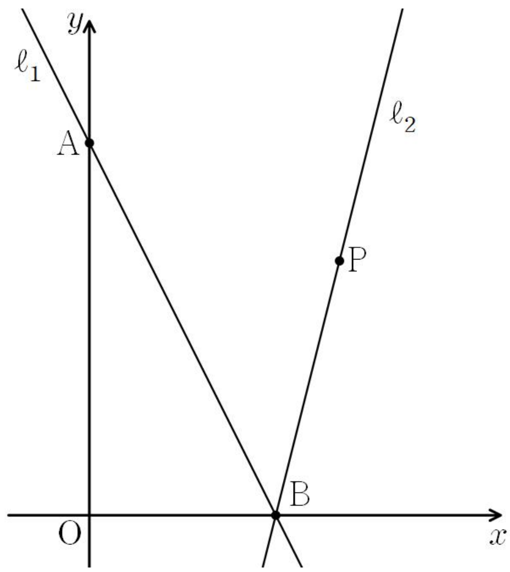
【 제시문 】

(가) 양의 실수 c에 대하여 점 B의 좌표를 $(c, 0)$이라 하고, $0 \le t \le 4$인 실수 t에 대하여 다음과 같이 정의된 두 함수 $f(t)$, $g(t)$를 생각하자.

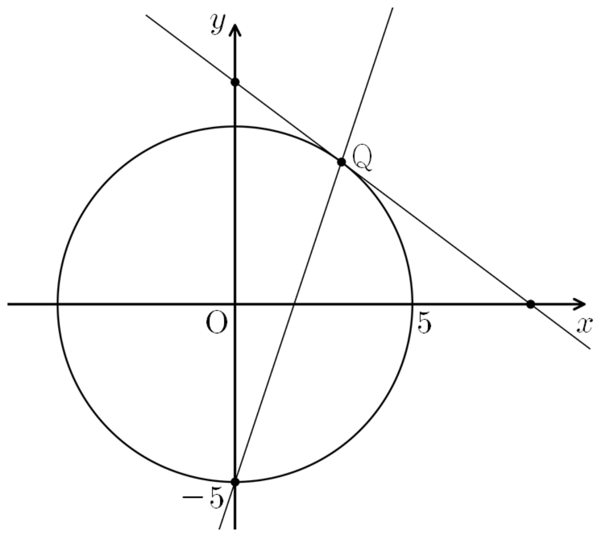
$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}t - 2 & (0 \le t \le 2) \\ -\dfrac{5}{2} + \sin 2\pi t & (2 < t \le 4) \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 4 & (0 \le t \le 3) \\ 4 + \sin 2\pi t & (3 < t \le 4) \end{cases}$$

점 B를 지나고 기울기가 $f(t)$, $g(t)$인 직선을 각각 ℓ_1, ℓ_2라 하자. 점 A는 직선 ℓ_1과 y축의 교점이고, 제1사분면 위의 점 P는 직선 ℓ_2 위에 있다. 삼각형 ABP의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

[그림 4]는 $c = \sqrt{5}$, $t = 0$, 점 P의 x좌표가 3일 때를 나타낸다.



[그림 4]



[그림 5]

(나) 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 C를 생각하자. 양수 $m(m \ne 1)$에 대하여 점 $(0, -5)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 원 C와 만나는 점 중 x좌표가 0이 아닌 것을 Q라 하자. 원 C 위의 점 Q에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(m)$이라 하자. [그림 5]는 $m = 3$일 때 원 C 위의 점 Q에서의 접선 및 그 접선이 좌표축과 만나는 점들을 나타낸다.

[문제 2-1] (30점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오. (단, $0 \le t \le 4$)

(1) (8점) $c = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 5$가 되는 t의 값을 모두 구하시오.

(2) (10점) $\overline{\mathrm{BP}} = s$라 하자. $c = \sqrt{5}$, $t = 0$일 때, $\displaystyle\lim_{s \to 0+} R$을 조사하시오.

(3) (12점) 두 직선 ℓ_1과 ℓ_2가 이루는 예각의 크기의 최솟값을 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

[문제 2-2] (20점) 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

(1) (8점) 점 $(0, -5)$를 지나고 기울기가 각각 2, $5\sqrt{3}-8$인 직선이 원 C와 만나는 점 중 x좌표가 0이 아닌 것을 각각 Q_1, Q_2라 할 때, 점 $(0, -5)$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$의 길이를 구하시오.

(2) (12점) $\displaystyle\lim_{m \to \infty} \frac{S(m)}{m^{\alpha}}$의 값이 0이 아닌 실수이기 위한 실수 α의 값과 그 극한값을 구하시오.

2026학년도 논술고사

자연계열(오전)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 6

2026학년도 자연계열(오전) 모범답안

자연계열
(오전)

[문제 1-1]

(1) $x>-1$에서 $g'(x)=3x^2+2x$이고 $x<-1$에서 $g'(x)=-3x^2-2x$이므로 양수 t에 대하여

$$\ell_1 : y = -(3(t+1)^2-2(t+1))(x+(t+1)) + (t+1)^3-(t+1)^2$$
$$\ell_2 : y = (3(t-1)^2+2(t-1))(x-(t-1)) + (t-1)^3+(t-1)^2$$

이다. 두 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$$x = a(t) = -\frac{5t^2+1}{3t^2+1}$$

이다. 따라서 $\lim_{t\to\infty} a(t) = -\frac{5}{3}$이다.

[채점 기준]

(1) 직선 ℓ_1과 ℓ_2를 올바르게 구함 [4점]

(2) 교점의 x좌표를 올바르게 구함 [4점]

(3) 극한값을 올바르게 구함 [2점]

(2) 충분히 작은 양수 t에 대하여

$$\ell_3 : y = (3t^2-2t)(x+t) - t^3+t^2$$
$$\ell_4 : y = (3t^2+2t)(x-t) + t^3+t^2$$

이다. 직선 ℓ_3와 x축의 교점은 $\mathrm{R}\left(-\frac{2t^2-t}{3t-2}, 0\right)$, 직선 ℓ_4와 x축의 교점은 $\mathrm{T}\left(\frac{2t^2+t}{3t+2}, 0\right)$, 직선 ℓ_3과 ℓ_4의 교점은 $\mathrm{Q}(t^2, 3t^4-t^2)$이다. 따라서

$$S(t) = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{2t^2+t}{3t+2}+\frac{2t^2-t}{3t-2}\right)(3t^4-t^2)\right| = \frac{2t^3(3t^2-1)^2}{4-9t^2}$$

이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^k} = \lim_{t\to 0+}\frac{2t^3(3t^2-1)^2}{t^k(4-9t^2)}$$

이다. 위 극한값이 0이 아닌 실숫값으로 존재하기 위한 k의 값은 3이고 $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^k} = \frac{1}{2}$이다.

[채점 기준]

(1) 점 R과 T의 좌표를 올바르게 구함 [4점]

(2) 삼각형의 넓이 $S(t)$를 올바르게 구함 [2점]

(3) k값과 극한값을 올바르게 구함 [4점]

[문제 1-2]

(1) $p=3$, $q=4$이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=20$는 $x \le -1$ 또는 $x \ge 7$에서 만난다. 이 구간에서 $g(x)=(x-3)^2-16$이므로

$$(x-3)^2-16=20 \ \Rightarrow\ (x-3)^2=36 \ \Rightarrow\ x=-3 \text{ 또는 } x=9$$

이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=20$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하면

$$\begin{aligned} B &= \int_{-3}^{-1}(20-((x-3)^2-16))\,dx + \int_{-1}^{7}(20-(16-(x-3)^2))\,dx + \int_{7}^{9}(20-((x-3)^2-16))\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+27x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+13x\right]_{-1}^{7} + \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+27x\right]_{7}^{9} \\ &= \frac{352}{3} \end{aligned}$$

이다.

[채점 기준]
(1) $y=20$과 $y=g(x)$의 교점을 올바르게 구함 [2점]
(2) 각 구간별 적분식을 올바르게 나타냄 [3점]
(3) 각 적분을 올바르게 계산 [3점]

(2) 점 $\mathrm{P}(6,9)$와 점 $(5,0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=9x-45$이고, 점 $\mathrm{P}(6,9)$와 점 $(15,0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+15$이다. 이를 통해 점 $\mathrm{P}(6,9)$를 지나는 직선 중 기울기가 9보다 크거나 -1보다 작은 직선과 곡선 $y=g(x)$의 교점의 개수는 2인 것을 알 수 있다. 따라서 점 $\mathrm{P}(6,9)$를 지나는 직선 중 직선의 기울기가 -1 이상 9 이하인 직선과 곡선 $y=g(x)$의 교점의 개수는 3 이상이다.

직선 $y=9x-45$와 곡선 $y=g(x)$의 교점은 $(5,0)$, $(6,9)$, $(24,171)$이고, 직선 $y=-x+15$와 곡선 $y=g(x)$의 교점은 $(4,11)$, $(6,9)$, $(15,0)$이다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 교점을 고려하므로 정수 x를 생각하자. $x<4$일 때 점 $\mathrm{P}(6,9)$와 점 $(x,g(x))$를 지나는 직선의 기울기는 -1보다 작고, $x>24$일 때 점 $\mathrm{P}(6,9)$와 $(x,g(x))$를 지나는 직선의 기울기는 9보다 크다. 따라서 $4\le x<6$ 또는 $6<x\le 24$인 경우 교점의 개수가 3 이상이면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 교점의 개수가 2 이상이다. 이를 만족하는 x는 20개다.

x좌표와 y좌표가 모두 정수인 교점의 개수가 3인 직선은 세 점 $(5,0)$, $(6,9)$, $(24,171)$을 지나는 직선 $y=9x-45$와 세 점 $(4,11)$, $(6,9)$, $(15,0)$을 지나는 직선 $y=-x+15$뿐이다. 따라서 중복된 두 직선을 고려하면, <조건>을 만족시키는 직선의 개수는 18이다.

[채점 기준]
(1) 교점의 개수가 3 이상인 상황(기울기)을 관찰 [3점]
(2) $4\le x<6$ 또는 $6<x\le 24$에서 <조건>을 만족시킬 수 있음 [3점]
(3) 중복된 직선의 개수를 제외하여 개수를 올바르게 구함 [4점]

[문제 1-3]

함수 $y=m|x|$의 그래프와 함수 $y=h(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 함수 $y=m|x|$의 그래프와 함수 $y=h(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형에서 $x\ge 0$인 부분의 넓이를 $T(m)$이라 하면 $A(m)=2T(m)$이므로 $T(m)$이 최소일 때 $A(m)$도 최소이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프와 y축의 교점을 C, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축의 교점을 D, $0\le x<2$에서 직선 $y=mx$와 $y=4-2x$의 교점을 P, $x\ge 2$에서 직선 $y=mx$와 $y=5x-10$의 교점을 Q라 하자. 점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{m+2}, \frac{4m}{m+2}\right)$이고 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{10}{5-m}, \frac{10m}{5-m}\right)$이다. $T(m)$은 삼각형 COD의 넓이와 삼각형 ODQ의 넓이의 합에서 삼각형 ODP의 넓이의 2배를 뺀 것과 같으므로

$$T(m) = 4 + \frac{10m}{5-m} - \frac{8m}{m+2}$$

이다.

$$T'(m) = \frac{50}{(5-m)^2} - \frac{16}{(m+2)^2} = \frac{2(17m^2+180m-100)}{(5-m)^2(m+2)^2}$$

이고 $T'(m)$의 분모는 $0 < m < 5$에서 양수이므로, $T(m)$은 $17m^2 + 180m - 100 = 0$을 만족하는 m에서 최솟값을 갖는다. 따라서

$$m = \frac{-90 + 70\sqrt{2}}{17}$$

이다.

[채점 기준]

(1) $h(x)$와 $y = m|x|$의 교점을 올바르게 구함 [2점]

(2) $T(m)$을 올바르게 계산 [3점]

(3) $T'(m)$을 올바르게 계산 [3점]

(4) $A(m)$이 최소가 되는 m의 값을 올바르게 계산 [4점]

[문제 2-1]

(1) 점 B의 좌표가 $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$이고 점 A는 직선 ℓ_1과 y축의 교점이므로 직선 ℓ_1의 기울기 $f(t)$가 -3일 때 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$임을 알 수 있다. $0 \le t \le 2$인 실수 t에서 $-\frac{1}{4}t - 2 > -3$이므로 $-\frac{5}{2} + \sin 2\pi t = -3$을 만족시키는 t의 값을 $2 < t \le 4$ 범위에서 모두 구하면 된다. 따라서 $t = \frac{31}{12}$, $t = \frac{35}{12}$, $t = \frac{43}{12}$, $t = \frac{47}{12}$이다.

[채점 기준]

(1) 기울기 $f(t)$가 -3임을 관찰하여 $-\frac{5}{2} + \sin 2\pi t = -3$을 쓴 경우 [4점]

(2) 이를 이용하여 t 구함 [4점]

(2) 각 ABP의 크기를 β라 하자. $t = 0$일 때, 점 A, B, P의 좌표는 각각 $(0, 2\sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, 0)$, $\left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}, \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)$이므로

$$\tan\beta = \frac{(-2) - 4}{1 + (-2) \times 4} = \frac{6}{7},$$

$$\sin\beta = \frac{6}{\sqrt{85}},$$

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)^2}$$

임을 알 수 있다. 사인법칙에 의해

$$R = \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{2\sin\beta} = \frac{\sqrt{85}}{12}\sqrt{\left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)^2}$$

이다. 따라서

$$\lim_{s \to 0+} R = \frac{\sqrt{85}}{12} \lim_{s \to 0+} \sqrt{\left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{5\sqrt{85}}{12}$$

이다.

[채점 기준]

(1) 점 A와 P의 좌표를 구함 [2점]

(2) $\tan\beta$를 구하고 $\sin\beta$를 구함 [4점]

(3) R을 구하고 극한값을 올바르게 구함 [4점]

(3) (2)에서 정의된 β에 대해

$$\tan\beta = \frac{f(t) - g(t)}{1 + f(t)g(t)} \qquad (0 \le t \le 4)$$

이다.

① $0 \le t \le 2$인 경우

$$\tan\beta = \frac{\left(-\frac{1}{4}t-2\right)-4}{1+\left(-\frac{1}{4}t-2\right)\times 4} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{17}{t+7}\right)$$

이다. 닫힌구간 $[0, 2]$에서

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{17}{t+7}\right) \ge \frac{1}{4}\left(1+\frac{17}{2+7}\right) = \frac{13}{18}$$

이므로 $\tan\beta \ge \frac{13}{18}$이다.

② $2 < t \le 3$인 경우

$$\tan\beta = \frac{\left(-\frac{5}{2}+\sin 2\pi t\right)-4}{1+\left(-\frac{5}{2}+\sin 2\pi t\right)\times 4} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{17}{9-4\sin 2\pi t}\right)$$

이고

$$4\sin 2\pi t \ge 4\sin\left(2\pi\times\frac{11}{4}\right) = -4$$

이므로 $\tan\beta \ge \frac{15}{26}$이다.

③ $3 < t \le 4$인 경우

$$\tan\beta = \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)-4}{1+\left(-\frac{5}{2}+\sin 2\pi t\right)\times(4+\sin 2\pi t)} = \frac{\frac{13}{2}}{-\sin^2 2\pi t-\frac{3}{2}\sin 2\pi t+9}$$

이고

$$-\sin^2 2\pi t-\frac{3}{2}\sin 2\pi t+9 = -\left(\sin 2\pi t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{153}{16} \le \frac{153}{16}$$

이므로 $\tan\beta \ge \frac{104}{153}$ 이다.

①, ②, ③으로부터 $\tan\beta > 0$이므로 β는 예각임을 알 수 있다. 각 ABP의 크기 β의 최솟값이 θ이므로 $\tan\theta = \frac{15}{26}$이다.

[채점 기준]

(1) $0 \le t \le 2$인 경우 $\tan\beta$의 최솟값을 올바르게 구함 [3점]

(2) $2 < t \le 3$인 경우 $\tan\beta$의 최솟값을 올바르게 구함 [3점]

(3) $3 < t \le 4$인 경우 $\tan\beta$의 최솟값을 올바르게 구함 [4점]

(4) 답을 올바르게 구함 [2점]

[문제 2-2]

(1) 점 $(0, -5)$를 지나고 기울기 m이 2, $5\sqrt{3}-8$인 직선을 각각 L_1, L_2라 하자. 두 직선이 이루는 예각의 크기를 α라 하면

$$\tan\alpha = \frac{2-(5\sqrt{3}-8)}{1+2(5\sqrt{3}-8)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다. 따라서 $\angle \mathrm{Q_1OQ_2} = \frac{\pi}{3}$이고 호의 길이는 $5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$이다.

[채점 기준]
(1) 두 직선이 이루는 각 α를 올바르게 구함 [4점]
(2) 원주각의 성질을 이용하여 $\angle \mathrm{Q_1OQ_2}$을 구하고 호의 길이를 구함 [4점]

(2) 점 $(0, -5)$를 지나고 기울기 m인 직선의 방정식은 $y = mx - 5$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{10m}{1+m^2}, \frac{5(m^2-1)}{1+m^2}\right)$이다. 원 C 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$\frac{10m}{1+m^2}x + \frac{5(m^2-1)}{1+m^2}y = 25$$

이고,

$$S(m) = \frac{1}{2} \times \frac{5(1+m^2)}{2m} \times \frac{5(1+m^2)}{m^2-1} = \frac{25(m^2+1)^2}{4m(m^2-1)}$$

이다. 따라서 $\lim_{m \to \infty} \frac{S(m)}{m^\alpha}$이 0이 아닌 실수로 존재하기 위한 α의 값은 1이고 이때의 극한값은 $\frac{25}{4}$이다.

[채점 기준]
(1) 접점 Q를 구하여 접선의 방정식을 올바르게 구함 [4점]
(2) 삼각형의 넓이 $S(m)$을 올바르게 구함 [4점]
(3) α와 극한값을 올바르게 구함 [4점]