2025학년도 논술고사

자연계열(약학과)

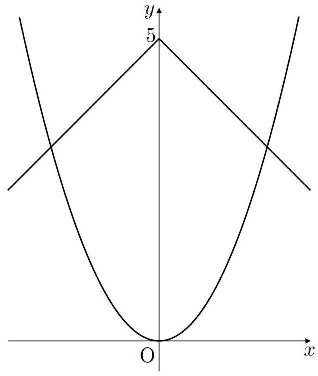
성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

【 제시문 】

(가) 양의 실수 a에 대하여 두 함수 $f_1(x)=ax^2$, $f_2(x)=\begin{cases} ax+a^2+4 & (x<0) \\ -ax+a^2+4 & (x\geq 0)\end{cases}$이 있다. 두 함수 $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형을 S라 하자. 두 함수의 그래프의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P의 x좌표를 p라 하자. 【그림 1】은 $a=1$일 때 두 함수의 그래프를 나타낸다.

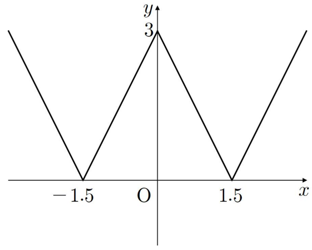


【그림 1】

(나) 함수 $g(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$g(x)=\begin{cases} -2x-3 & \left(x<-\dfrac{3}{2}\right) \\ 2x+3 & \left(-\dfrac{3}{2}\leq x<0\right) \\ -2x+3 & \left(0\leq x<\dfrac{3}{2}\right) \\ 2x-3 & \left(x\geq \dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$$

【그림 2】는 함수 $y=g(x)$의 그래프이다.



【그림 2】

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) p의 최솟값과 그때의 a의 값을 구하라.

(2) (10점) 도형 S의 넓이를 a와 p에 대한 식으로 나타내라.

(3) (10점) 직선 $y=4a$에 의하여 도형 S가 넓이가 같은 두 도형으로 나뉠 때, $4p^3+3p^2$의 값을 구하라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=e^{x+k}$의 그래프의 교점의 개수가 3인 모든 실수 k의 값의 범위를 구하라.

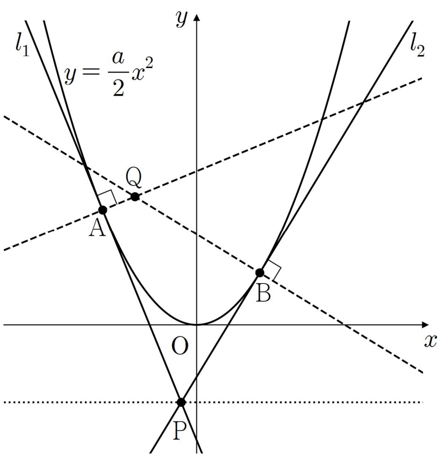
(2) (10점) 함수 $y=g(x)$의 그래프와 원 $(x-c)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$의 교점의 개수가 3인 실수 c의 값을 모두 구하라.

[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

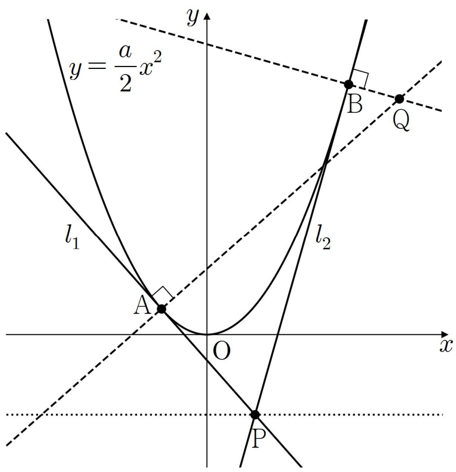
【 제시문 】

양의 실수 a와 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{P}(p, -1)$에서 함수 $f(x)=\dfrac{a}{2}x^2$의 그래프에 서로 다른 두 접선을 그을 수 있다. 이때 두 접점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B라 하고 $\theta = \angle \mathrm{APB}$라 하자. 점 A를 접점으로 하는 접선을 l_1, 점 B를 접점으로 하는 접선을 l_2라 하자. 점 A를 지나고 l_1에 수직인 직선을 m_1, 점 B를 지나고 l_2에 수직인 직선을 m_2라 하고, m_1과 m_2의 교점을 Q라 하자. (단, $0 < \theta < \pi$)

【그림 3】은 점 Q의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 크고 점 B의 x좌표보다 작은 경우를 나타내고, 【그림 4】는 점 Q의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 큰 경우를 나타낸다.



【그림 3】



【그림 4】

[문제 2-1] (12점) 점 Q의 x좌표와 y좌표를 각각 a와 p에 대한 식으로 나타내라.

[문제 2-2] (16점) $a=3$이고 점 Q는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이라 하자. 다음 물음에 답하라. (단, 점 Q는 제2사분면 위의 점이다.)

(1) (6점) p의 값을 구하라.

(2) (10점) $\sin\theta$의 값을 구하라.

[문제 2-3] (22점) 점 Q의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크고 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$이라 하자. 다음 물음에 답하라.

(1) (8점) $\overline{\mathrm{PQ}}$를 구하라.

(2) (14점) $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BQ}} = 3 : \sqrt{13}$일 때 삼각형 APB의 넓이를 구하라.

2025학년도 논술고사

자연계열(약학과) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 3

2025학년도 자연계열(약학과) 모범답안

자연계열
(약학과)

[문제 1-1]

(1) 점 P는 제1사분면 위의 교점이므로 $p>0$이다. 방정식 $ap^2=-ap+a^2+4$를 풀면 다음과 같다.

$$p=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a(a^2+4)}}{2a}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\left(a+\frac{4}{a}\right)}$$

$a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 대소관계에 의하여, $a+\frac{4}{a}\ \geq\ 4$이며 등호는 $a=2$일 때 성립한다. 즉,

$$p=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\left(a+\frac{4}{a}\right)}\ \geq\ -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+4}\ =\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

이다. 그러므로 p의 최솟값은 $a=2$일 때 $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$이다.

(2) 점 P는 두 함수의 교점이므로 $ap^2=-ap+a^2+4$가 성립한다. 직선 $y=ap^2$에 의하여 도형 S가 나뉘는 부분 중 윗부분과 아랫부분의 넓이를 각각 구하자. $f_1(p)=f_1(-p)=ap^2$이므로 $y=ap^2$은 두 함수의 교점을 지나고 x축에 평행한 직선이고, 도형 S가 나뉘는 부분 중 윗부분은 밑변의 길이가 $2p$이고 높이가 $((a^2+4)-ap^2)$인 삼각형이다. 따라서 그 넓이는 $p(-ap^2+a^2+4)=ap^2$이다.
직선 $y=ap^2$에 의하여 도형 S가 나뉘는 부분 중 아랫부분은 곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=ap^2$, $x=-p$, $x=p$로 둘러싸인 도형이므로 정적분을 이용하여 그 넓이를 구하면 $\int_{-p}^{p}(ap^2-ax^2)\,dx=\frac{4}{3}ap^3$이다. 따라서 S의 넓이는 $\frac{4}{3}ap^3+ap^2$이다.

(3) [문제 1-1] (1)과 (2)로부터 $p>1$이므로 $\frac{4}{3}ap^3>ap^2$이다. 따라서 직선 $y=ap^2$에 의하여 도형 S가 나뉘는 부분 중 아랫부분의 넓이가 윗부분의 넓이보다 크므로, S의 넓이를 반으로 나누려면 직선 $y=4a$가 직선 $y=ap^2$보다 더 아래에 있어야 한다. 직선 $y=4a$와 곡선 $y=ax^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 도형 S의 넓이의 반이고 직선 $y=4a$와 곡선 $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 ± 2이므로,

$$\int_{-2}^{2}(4a-ax^2)\,dx=\frac{32}{3}a\ =\ \frac{2}{3}ap^3+\frac{ap^2}{2}$$

이다. 따라서 이를 정리하면 $4p^3+3p^2=64$이다.

[문제 1-2]

(1) 곡선 $y=e^{x+k}$이 $-\frac{3}{2}<x<0$, $x>\frac{3}{2}$에서 각각 함수 $y=g(x)$의 그래프와 접하는 경우의 점을 (t,e^{t+k})라 두면, $-\frac{3}{2}<t<0$이거나 $t>\frac{3}{2}$이다. $-\frac{3}{2}<t<0$이면, $e^{t+k}=2$이고 $e^{t+k}=2t+3$이므로 $t=-\frac{1}{2}$, $k=\ln 2+\frac{1}{2}$이다. $t>\frac{3}{2}$이면 $e^{t+k}=2$, $e^{t+k}=2t-3$이므로 $t=\frac{5}{2}$, $k=\ln 2-\frac{5}{2}$이다. 지수함수 $y=e^{x+k}$와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형으로부터 두 함수의 그래프의 교점이 3인 경우는 $\ln 2-\frac{5}{2}<k<\ln 2+\frac{1}{2}$이다.

(2) 원 $(x-c)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$가 열린구간 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{3}{2}\right)$에서 각각 함수 $y=g(x)$의 그래프가 접하는 경우를 조사해 보자.

먼저 열린구간 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$에서 접하면 $g(x)=2x+3$이므로 이차방정식 $(x-c)^2+\left(2x+3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$이 중근을 갖는다. 즉, $5x^2+(6-2c)x+c^2=0$이고 판별식 $D=(6-2c)^2-20c^2=0$에서 $c=-\frac{3}{4}\pm\frac{3\sqrt{5}}{4}$이다. 이 중 실근의 개수가 3인 것은 $c=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{5}$이다.

열린구간 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$에서 접하면 $g(x)=-2x+3$이므로 이차방정식 $(x-c)^2+\left(-2x+3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$이 중근을 갖는다. 즉, $5x^2-(2c+6)x+c^2=0$이고 판별식 $D=(-2c-6)^2-20c^2=0$에서 $c=\frac{3}{4}\pm\frac{3\sqrt{5}}{4}$이다. 이 중 실근의 개수가 3인 것은 $c=\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$이다.

원 $(x-c)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$가 세 점 $(0,3)$, $\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 중 하나를 지나는 경우도 두 곡선의 교점이 3개다. 이때 c의 값은 각각 0, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$이다. 따라서 c의 값은 $-\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}$, $-\frac{3}{2}$, 0, $\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$, $\frac{3}{2}$이다.

[문제 2-1] 함수 $f(x)=\frac{a}{2}x^2$ 위의 한 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{a}{2}t^2\right)$이라 하면 $f'(t)=at$이므로 접선의 방정식은 $y=at(x-t)+\frac{a}{2}t^2$ 이다. 이때 이 접선이 점 $\mathrm{P}(p,-1)$를 지나므로 $\frac{a}{2}t^2-apt-1=0$이다. 점 A와 점 B의 x좌표를 각각 β, $\gamma\,(\beta<\gamma)$라 하면, β와 γ는 위 이차방정식의 서로 다른 두 실근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\beta+\gamma=2p\,,\quad \beta\gamma=-\frac{2}{a}\qquad\cdots\cdots\ ①$$

이다. 한편 두 직선 m_1과 m_2의 방정식은 각각

$$m_1:\ y=-\frac{1}{a\beta}(x-\beta)+\frac{a\beta^2}{2},\quad m_2:\ y=-\frac{1}{a\gamma}(x-\gamma)+\frac{a\gamma^2}{2}$$

이므로 $-\frac{x}{a}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{a}{2}(\beta^2-\gamma^2)=0$에서 $x=2ap$이다. ①을 이용하면 점 Q의 y좌표는 다음과 같다.

$$y=-\frac{2ap}{a\beta}+\frac{1}{a}+\frac{a\beta^2}{2}=-\frac{\beta+\gamma}{\beta}+\frac{1}{a}-\frac{\beta^2}{\beta\gamma}=2ap^2+\frac{1}{a}+1$$

그러므로 점 Q의 x좌표는 $x=2ap$이고 y좌표는 $y=2ap^2+\frac{1}{a}+1$이다.

[문제 2-2]

(1) [문제 2-1]에서 구한 점 Q의 좌표에 $a=3$을 대입하면 점 Q의 좌표는 $\left(6p,6p^2+\frac{4}{3}\right)$이다. 점 Q가 곡선 $y=f(x)=\frac{a}{2}x^2$ 위의 점이므로 $6p^2+\frac{4}{3}=\frac{3}{2}(6p)^2$이다. 따라서 $p^2=\frac{1}{36}$이고 $p=\pm\frac{1}{6}$이다. 점 Q가

제2사분면 위의 점이므로 $p = -\dfrac{1}{6}$이다.

(2) 점 Q가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 제2사분면 위에 있으므로 점 Q와 점 A는 일치한다. 따라서 삼각형 APB는 선분 AP가 빗변인 직각삼각형이다. $a=3$이고 [문제 2-2] (1)에 의해 $p=-\dfrac{1}{6}$이므로 [문제 2-1]의 ①에 대입하여 점 A와 점 B의 x좌표 β, $\gamma\,(\beta<\gamma)$를 계산하면 $\beta=-1$이고 $\gamma=\dfrac{2}{3}$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$이고 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$이다. [문제 2-2] (1)에 의해 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{6}, -1\right)$이므로 $\overline{AB} = \dfrac{5\sqrt{5}}{6}$, $\overline{AP} = \dfrac{5\sqrt{10}}{6}$이다. 그러므로 $\sin\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

[문제 2-3]

(1) 【그림 4】의 오른쪽 그림에 의해 삼각형 PQA와 PQB는 각각 $\angle A$와 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로, 점 P, Q, A, B는 원 위에 있고 선분 PQ는 그 원의 지름이다. 또한, 그 원은 삼각형 APB의 외접원이므로 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta} = \overline{PQ}$이다. $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$이므로 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$이다.
그러므로 $\overline{PQ} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta} = \dfrac{12\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{13}{3\sqrt{13}} = \dfrac{4\sqrt{65}}{5}$ 이다.

(2) 두 선분 AQ와 BP의 교점을 T라 하면 삼각형 APT와 QTB는 각각 $\angle A$ 와 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이다. $\overline{AP} : \overline{BQ} = 3 : \sqrt{13}$이므로 양수 k에 대하여 $\overline{AP} = 3k$, $\overline{BQ} = \sqrt{13}\,k$라 하자. 호 AB에 대한 원주각의 크기는 같으므로 [문제 2-3]의 (1)로부터 $\angle Q$의 크기는 θ임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 APT와 QTB는 닮음비가 $3 : \sqrt{13}$인 닮은 삼각형이다.
$\overline{PT}\cos\theta = \overline{AP} = 3k$이므로 $\overline{PT} = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}k$이고, $\overline{PT}\sin\theta = \overline{AT}$ 이므로 $\overline{AT} = \dfrac{9}{2}k$이다. 두 삼각형의 닮음비를 이용하면 $\overline{AT} : \overline{BT} = 3 : \sqrt{13}$이므로 $\overline{BT} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}\overline{AT} = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}k$이고, 이를 통해 $\overline{BP} = \overline{PT} + \overline{BT} = 3\sqrt{13}k$를 얻을 수 있다. 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{PQ}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2$이므로 [문제 2-3]의 (1)에서 구한 $\overline{PQ}$를 이용하면 $\left(\dfrac{4\sqrt{65}}{5}\right)^2 = (3\sqrt{13}k)^2 + (\sqrt{13}k)^2$이고 이를 정리하면 $k^2 = \dfrac{8}{25}$이다.
그러므로 삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{AP}\times\overline{BP}\times\sin\theta = \frac{1}{2}\times(3k)\times(3\sqrt{13}k)\times\frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{27}{2}k^2 = \frac{108}{25}$$

이다.

2025학년도 논술고사

자연계열(약학과)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 2

2025학년도 자연계열(약학과) 채점기준

자연계열
(약학과)

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$ap^2 = -ap + a^2 + 4$임을 관찰	3점
	산술기하평균을 활용함	3점
	a와 p의 값을 구함	각 2점
[1-1] (2)	도형 S의 넓이를 정적분으로 표현하거나 이를 구하기 위한 전략을 세움	5점
	넓이를 바르게 구함	5점
[1-1] (3)	직선 $y = 4a$과 $y = ax^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산하거나 $\int_{-2}^{2}(4a - ax^2)\,dx = \frac{32}{3}a$ 임을 관찰	4점
	(2)에서 구한 S의 넓이의 반이 된다는 사실로부터 식을 잘 세움	2점
	답을 바르게 구함	4점
[1-2] (1)	$k = \ln 2 + \frac{1}{2}$ 혹은 $k = \ln 2 - \frac{5}{2}$ ($t = -\frac{1}{2}$ 혹은 $t = \frac{5}{2}$)에서 접한다는 사실을 관찰함	각 3점
	$\ln 2 - \frac{5}{2} < k < \ln 2 + \frac{1}{2}$인 경우 교점이 3개임을 설명함	4점
[1-2] (2)	접하는 경우 c의 값을 관찰함	각 2점
	원이 점 $(0,3)$을 지나는 경우를 관찰함	2점
	원이 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 중 하나를 지나는 경우를 관찰함	각 2점

2025학년도 자연계열(약학과) 채점기준

자연계열
(약학과)

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	두 점 A, B의 x좌표가 $\frac{a}{2}t^2 - apt - 1 = 0$을 만족한다는 것을 관찰	4점
	점 Q의 x좌표를 올바르게 나타냄	4점
	점 Q의 y좌표를 올바르게 나타냄	4점
[2-2] (1)	$6p^2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}(6p)^2$임을 나타냄	3점
	점 Q가 제2사분면의 위의 점이라는 것으로부터 답을 구함	3점
[2-2] (2)	점 A와 점 B의 좌표를 올바르게 구함	각 3점
	답을 올바르게 구함	4점
[2-3] (1)	네 점 P, Q, A, B는 원 위에 있음을 관찰	4점
	답을 올바르게 구함	4점
[2-3] (2)	삼각형 APT와 QTB가 닮음임을 관찰	4점
	$\overline{AP}$와 $\overline{BP}$의 길이를 구함	각 3점
	답을 올바르게 구함	4점