2025학년도 논술고사

자연계열(오후)

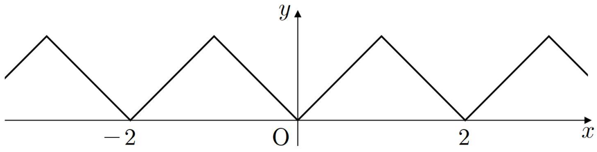
성　명	
전　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항 1]【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

【 제시문 】

(가) 함수 $F(x)$는【그림 1】과 같이 $-1 \le x < 1$일 때 $F(x) = |x|$이고 모든 실수 x에 대하여 $F(x+2) = F(x)$이다.



【그림 1】

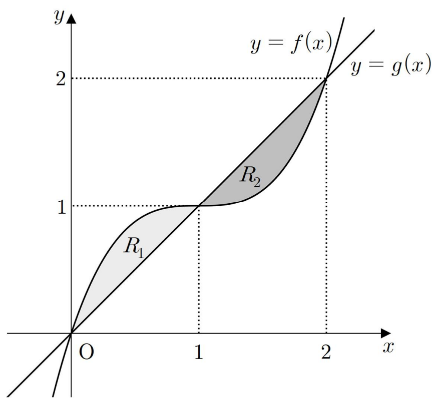
(나) <조건>을 만족하는 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$를 생각하자.

< 조건 >

① $f(0) = g(0) = 0$이다.

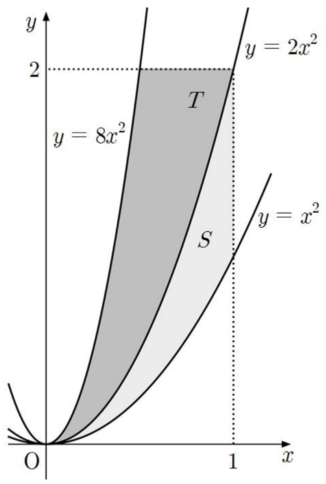
② 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 두 양의 실근 α, β가 존재하고, 열린구간 $(0, \alpha)$에서 $f(x) > g(x)$이고 열린구간 (α, β)에서 $f(x) < g(x)$이다. (단, $\alpha < \beta$)

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프와 두 직선 $x = 0$, $x = \alpha$로 둘러싸인 도형을 R_1, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프와 두 직선 $x = \alpha$, $x = \beta$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하고, 도형 R_1과 R_2의 넓이를 각각 r_1, r_2라 하자.【그림 2】는 $f(x) = (x-1)^3 + 1$, $g(x) = x$일 때 도형 R_1과 R_2를 나타낸다.



【그림 2】

(다) 연속함수 $h(x)$가 $h(0) = 0$이고 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다고 하자. 양의 실수 a에 대하여 두 함수 $y = h(x)$, $y = 2h(x)$의 그래프와 직선 $x = a$로 둘러싸인 도형을 S라 하고, $0 < k < \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$인 실수 k에 대하여 두 함수 $y = \dfrac{1}{k^3}h(x)$, $y = 2h(x)$의 그래프와 직선 $y = 2h(a)$로 둘러싸인 도형을 T라 하자.【그림 3】은 $h(x) = x^2$, $k = \dfrac{1}{2}$, $a = 1$일 때 도형 S와 T를 나타낸다.



【그림 3】

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) 함수 $y=(F(x))^2$의 그래프와 직선 $y=x-c$의 교점의 개수가 2인 상수 c의 값을 모두 구하라. (단, $0 \le c < 2$)

(2) (10점) <조건>을 만족하는 함수 $y=F(x)$와 일차함수 $y=bx$에 대하여 극한 $\lim_{b\to 0+}\frac{b^m r_1}{r_2}$이 0이 아닌 실수가 되는 자연수 m의 값과 그때의 극한값을 구하라.

(3) (10점) <조건>을 만족하는 두 함수 $y=x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$과 $y=p^2x$에 대하여 $r_1=r_2$인 p의 값을 구하라.

(단, $0<p<\frac{1}{4}$)

[문제 1-2] (20점) 제시문 (다)를 읽고 다음 물음에 답하라.

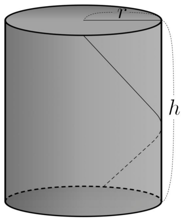
(1) (10점) 함수 $h(x)=\ln(2x+1)$에 대하여 $a=\frac{1}{2}$일 때, S의 넓이를 구하라.

(2) (10점) 함수 $h(x)=x^3$일 때 모든 양의 실수 a에 대하여 S의 넓이와 T의 넓이가 같다. 실수 k의 값을 구하라.

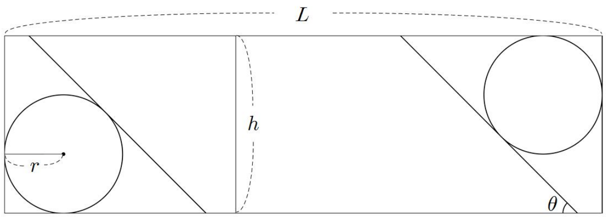
[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

【 제시문 】

(가) 밑면의 반지름의 길이가 $r=10$이고 높이가 $h=30$인 원기둥의 옆면을 【그림 4】와 같이 자르면 밑변의 길이가 20π, 높이가 30인 평행사변형을 얻는다. 이때 평행사변형의 내각 중 크지 않은 각의 크기를 θ라 하자. 이 평행사변형과 반지름의 길이가 r인 두 밑면을 【그림 5】와 같이 가로의 길이가 L이고 세로의 길이가 30인 직사각형 R에 서로 포개지는 부분이 없도록 그려 넣었다고 하자. 각 원은 옆면을 잘라 얻은 평행사변형의 한 변과 접하고 직사각형 R의 두 변과 접하도록 한다.

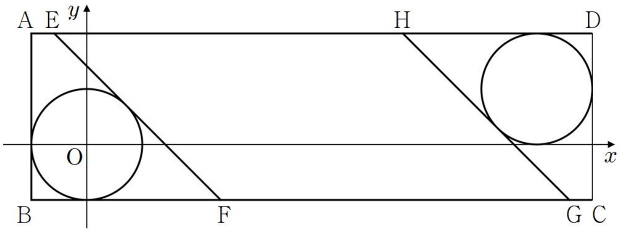


【그림 4】



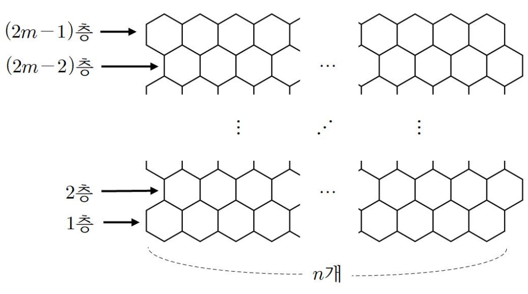
【그림 5】

【그림 5】를 【그림 6】과 같이 좌표평면 위에 나타내고, 직사각형 R의 네 꼭짓점을 각각 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$라 하고 평행사변형의 네 꼭짓점을 각각 $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$라 하자.

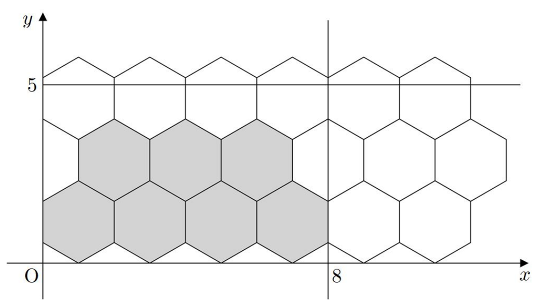


【그림 6】

(나) 두 자연수 m과 n에 대하여 한 변의 길이가 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$인 정육각형을 【그림 7】과 같이 가로 방향으로 n개씩 $(2m-1)$개의 층이 있도록 빈틈없이 '벌집 모양'으로 그린 그림이 있다. 이 그림을 모든 정육각형의 각 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 각각 음이 아닌 실수가 되도록 좌표평면 위에 나타냈다. 이때 1층 맨 왼쪽에 있는 정육각형의 한 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$이고 한 변은 y축 위에 있도록 한다. 【그림 8】은 $n=6$이고 $m=2$일 때의 '벌집 모양' 그림을 좌표평면 위에 나타낸 예이다.



【그림 7】



【그림 8】

두 자연수 k와 ℓ에 대하여 모든 꼭짓점의 x좌표가 닫힌구간 $[0, k]$에 속하고 y좌표가 닫힌구간 $[0, \ell]$에 속하는 정육각형의 개수를 X라 하고, 이러한 정육각형의 층의 개수를 M이라 하자. 예를 들어 【그림 8】에서 $k=8$이고 $\ell=5$일 때 $X=7$이고 $M=2$이다.

[문제 2-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$일 때, L의 값을 구하라.

(2) (10점) L의 최솟값을 구하라.

[문제 2-2] (30점) $m = n = 50$일 때, 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라. (단, $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$)

(1) (5점) $k = 10$, $\ell = 6$일 때 X의 값을 구하라.

(2) (15점) $k \geq 3$일 때, $M = \dfrac{\ell}{2} + 1$인 짝수 ℓ의 최솟값을 구하라.

(3) (10점) [문제 2-2] (2)에서 구한 값 ℓ에 대하여, $X > \dfrac{k\ell}{4}$인 짝수 k의 최솟값을 구하라.

2025학년도 논술고사

자연계열(오후)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 3

[문제 1-1]

(1) $-1 \leq x \leq 1$일 때 $(F(x))^2 = x^2$이다. 따라서 $c=0$일 때, 함수 $y=(F(x))^2$의 그래프와 직선 $y=x-c$는 두 점에서 만난다. $0<c<2$이라 하자. 함수 $y=(F(x))^2$의 그래프와 직선 $y=x-c$의 교점의 개수가 2가 되려면, 열린구간 $(0,1)$에서 함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x-c$가 접해야 한다. 그 접점을 (a,a^2)이라 두면 접선의 방정식은 $y=2a(x-a)+a^2$이므로 $a=\frac{1}{2}$이고, 접선의 방정식은 $y=x-\frac{1}{4}$이다. 따라서 $c=\frac{1}{4}$이다. $0<c<\frac{1}{4}$일 때 함수 $y=(F(x))^2$의 그래프와 직선 $y=x-c$는 세 점에서 만나고, $\frac{1}{4}<c<2$일 때 한 점에서 만난다. 따라서 답은 0, $\frac{1}{4}$이다.

(2) 함수 $y=F(x)$와 $y=bx$가 <조건>을 만족하므로, $0<b<\frac{1}{3}$이다. 함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=bx$의 원점이 아닌 교점 중 x좌표가 가장 작은 두 점의 좌표는 $\left(\frac{2}{1+b},\frac{2b}{1+b}\right)$와 $\left(\frac{2}{1-b},\frac{2b}{1-b}\right)$이다. 닫힌구간 $[0,3]$에서 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=bx$, x축에 의하여 생기는 여러 삼각형의 넓이로부터 $r_1=\frac{1-b}{1+b}$, $r_2=\frac{4b^2}{1-b^2}$임을 알 수 있다. 따라서 $\lim\limits_{b\to 0+}\frac{b^m r_1}{r_2}=\lim\limits_{b\to 0+}\frac{b^m(1-b)^2}{4b^2}=\lim\limits_{b\to 0+}\frac{b^{m-2}(1-b)^2}{4}$ 이므로 이 극한이 0이 아닌 실수를 극한값으로 가지려면, $m=2$이다. 이 때, $\lim\limits_{b\to 0+}\frac{b^2 r_1}{r_2}=\frac{1}{4}$이다.

(3) 두 곡선 $y=x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, $y=p^2x$의 원점이 아닌 두 교점의 x좌표는 방정식 $x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-p^2x=0$의 서로 다른 두 양의 실근이다. 따라서 두 교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}-p$, $\frac{1}{2}+p$이다. $r_1=r_2$이므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}-p}\left(x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-p^2x\right)dx=\int_{\frac{1}{2}-p}^{\frac{1}{2}+p}\left(p^2x-x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)dx$$

이고 이를 정리하면 $\int_0^{\frac{1}{2}+p}\left(x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-p^2x\right)dx=0$이다. 즉,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}+p}\left(x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-p^2x\right)dx&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+p\right)^4-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+p\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-p^2\right)\left(\frac{1}{2}+p\right)^2\\&=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}+p\right)^3\left(3\left(\frac{1}{2}+p\right)-4+6\left(\frac{1}{2}-p\right)\right)=0\end{aligned}$$

이다. $0<p<\frac{1}{4}$이므로 $3\left(\frac{1}{2}+p\right)-4+6\left(\frac{1}{2}-p\right)=0$이고 이를 풀면 $p=\frac{1}{6}$이다.

[문제 1-2]

(1) 도형 S의 넓이를 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u\,du \qquad (u=2x+1\text{로 치환})$$

$$= \frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 1\,du = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

(2) 곡선 $y=x^3$, 직선 $x=a$, x축으로 둘러싸인 도형을 W_1, 곡선 $y=\frac{1}{k^3}x^3$, 직선 $y=2a^3$, y축으로 둘러싸인 도형을 W_2라 하자. 도형 W_1과 W_2의 넓이를 각각 w_1, w_2라 쓰자. 도형 S의 넓이는 $\int_0^a (2x^3-x^3)\,dx = \int_0^a x^3\,dx = w_1$이 되어 $w_1=\frac{a^4}{4}$이다. 도형 S의 넓이와 T의 넓이가 같으므로 네 직선 $x=a$, $y=2a^3$, $x=0$, $y=0$으로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 생각하면 $3w_1+w_2=2a^4$이다. 따라서 $w_2=\frac{5}{4}a^4$이다.

곡선 $y=\frac{1}{k^3}x^3$과 직선 $y=2a^3$의 교점의 x좌표를 β라 하면, $w_2+\int_0^\beta \frac{1}{k^3}x^3\,dx = 2a^3\beta$가 성립하고 $w_2=\frac{5}{4}a^4$으로부터 $\frac{5}{4}a^4+\frac{\beta^4}{4k^3}=2a^3\beta$이다. 한편 $\beta=ak\sqrt[3]{2}$이므로 $\frac{5}{4}a^4+\frac{1}{2}a^4k\sqrt[3]{2}=2a^4k\sqrt[3]{2}$이다. $a>0$이므로 양변에 a^4을 나누어 k를 구하면 $k=\frac{5}{6\sqrt[3]{2}}=\frac{5\sqrt[3]{4}}{12}$이다.

[문제 2-1]

(1) 【그림 6】에서 왼쪽 원과 선분 EF와의 접점을 P라 하자. $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로 P와 원의 중심을 연결한 직선은 점 B를 지나고 삼각형 BFP는 직각이등변삼각형이다. $\overline{\mathrm{FP}}=b$라 하자. 원과 접선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{BF}}=b+10$이다. 직각이등변삼각형의 삼각비에 의하여 $b+10=b\sqrt{2}$이고 $b=10+10\sqrt{2}$이다. 따라서, $L=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{FG}}=(b+10)+(b-20)+20\pi=10+20\sqrt{2}+20\pi$이다.

(2) 【그림 6】에서 왼쪽 원의 중심이 원점에 있다고 하고 이 원과 선분 EF와의 접점을 P라 하자, 점 P의 좌표는 $(10\sin\theta, 10\cos\theta)$이고 이 점에서 접선의 방정식은 $y=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x+\frac{10}{\cos\theta}$이다. 점 E의 좌표는 $(c, 20)$이고 점 F의 좌표를 $(b, -10)$이라 두자. 이때 두 점 E와 F는 이 직선 위에 있으므로 $b=\frac{10(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$, $c=\frac{10-20\cos\theta}{\sin\theta}$를 만족한다. 이때 $\overline{\mathrm{BF}}=b+10$이고 $\overline{\mathrm{AE}}=10+c$이고

$$L=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{FG}}=b+c+20+20\pi=\frac{20-10\cos\theta}{\sin\theta}+20+20\pi$$

이다. L의 최솟값을 구하기 위해 몫의 미분법을 이용하면

$\dfrac{dL}{d\theta}=\dfrac{10(\sin\theta)^2-(20-10\cos\theta)\cos\theta}{(\sin\theta)^2}=\dfrac{10-20\cos\theta}{(\sin\theta)^2}$

이고 $\dfrac{dL}{d\theta}=0$를 만족하면 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$이므로 이때 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 구하는 L의 최솟값은 $10\sqrt{3}+20\pi+20$이다.

[문제 2-2]

(1) 【그림 8】에 의하여 세려고 하는 정육각형은 1, 2, 3층에 있음을 알 수 있다. 각 층의 정육각형의 개수는 각각 5, 4, 5이다. 따라서 $X=14$이다.

(2) j층의 정육각형의 꼭짓점 중 y좌표가 가장 큰 꼭짓점의 y좌표를 a_j라고 하면 $a_{j+1}=a_j+\sqrt{3}$ $(j\le 98)$이다. $a_1=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이므로 $a_j=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+(j-1)\sqrt{3}$이다. $a_M=M\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $M\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\ell$이어야 한다. $M=\dfrac{\ell}{2}+1$이므로 $\left(\dfrac{\ell}{2}+1\right)\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\ell$을 풀면 $\dfrac{16\sqrt{3}+24}{3}\le\ell$이다. $1.73<\sqrt{3}<1.74$로부터, $17<\dfrac{16\sqrt{3}+24}{3}<18$이다. 따라서 가장 작은 짝수 ℓ의 값은 18이다.

(3) k가 짝수이므로 홀수층에는 $\dfrac{k}{2}$개가 있고 짝수층에는 $\left(\dfrac{k}{2}-1\right)$개가 있다. 따라서 두 개의 연속된 층에는 $(k-1)$개의 정육각형이 있다. (2)에서 구한 값 $\ell=18$이므로 $M=10$이고 두 개의 연속된 층이 5개 있다. $X=5(k-1)$이므로 $5k-5>\dfrac{18k}{4}$이다. 그러므로 $k>10$이고 이를 만족하는 짝수 k의 최솟값은 12이다.

2025학년도 논술고사

자연계열(오후) 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 2

2025학년도 자연계열(오후) 채점기준

자연계열 (오후)

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$c=0$일때 함수의 그래프를 관찰함	3점
	$c=\frac{1}{4}$일 때 함수의 그래프를 관찰함	4점
	$\frac{1}{4}<c<2$인 경우와 $0<c<\frac{1}{4}$인 경우에 관찰함	3점
[1-1] (2)	r_1, r_2를 올바르게 구함	4점
	$m=2$임을 관찰함	3점
	극한값의 결과가 $\frac{1}{4}$임을 관찰함	3점
[1-1] (3)	x좌표 $\frac{1}{2}-p$, $\frac{1}{2}+p$를 올바르게 구함	2점
	$r_1=r_2$를 이용하여 적분식을 올바르게 구함	3점
	적분식을 계산하여 답을 올바르게 구함	5점
[1-2] (1)	적분식을 올바르게 구함	5점
	적분식을 계산하여 답을 올바르게 구함	5점
[1-2] (2)	$y=\frac{1}{k^3}x^3$과 직선 $y=2a^3$의 교점의 x좌표 β를 k에 대한 식으로 올바르게 구함	2점
	S의 넓이(w_1)를 a에 대한 식으로 올바르게 구함	3점
	적분식을 계산하여 답을 올바르게 구함	5점

2025학년도 자연계열(오후) 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$\theta=\dfrac{\pi}{4}$로부터 접선의 방정식을 올바르게 구하거나 직각이등변삼각형의 성질을 올바르게 이용함	3점
	$\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$ 를 올바르게 구함	4점
	답을 올바르게 구함	3점
[2-1] (2)	L을 θ에 대한 식으로 올바르게 구함	5점
	$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$임을 관찰함	3점
	답을 올바르게 구함	2점
[2-2] (1)	층수를 관찰함	2점
	답을 올바르게 구함	3점
[2-2] (2)	M층의 정육각형의 꼭짓점 중 y좌표가 가장 큰 꼭짓점의 y좌표(a_M)을 관찰함	4점
	부등식 $\left(\dfrac{\ell}{2}+1\right)\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\ell$ 을 올바르게 세움	4점
	$\sqrt{3}$의 근사값을 활용하여 $\dfrac{16\sqrt{3}+24}{3}$ 의 값의 범위를 올바르게 구함	4점
	답을 올바르게 구함	3점
[2-2] (3)	홀수층과 짝수층의 정육각형의 개수를 관찰함	3점
	$5k-5>\dfrac{18k}{4}$임을 관찰함	3점
	답을 올바르게 구함	4점