2025학년도 논술고사

자연계열(오전)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

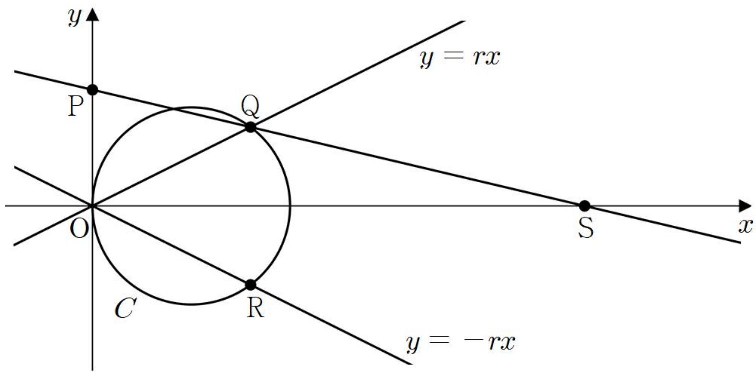
【 제시문 】

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(나) C는 중심이 $(c, 0)$이고 반지름의 길이가 c인 원이며, 점 P의 좌표는 $(0, \sqrt{r})$이다. 원점을 지나는 두 직선 $y=rx$와 $y=-rx$를 생각하자. 【그림 1】과 같이 직선 $y=rx$와 원 C의 교점 중 원점이 아닌 점을 Q, 직선 $y=-rx$와 원 C의 교점 중 원점이 아닌 점을 R, 직선 PQ와 x축의 교점을 S라 하자.

(단, $0<c<1$이고 $0<r<\frac{1}{4}$)



【그림 1】

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin x-\sin^3 x-\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx$ 의 값을 구하라.

(2) (10점) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+2\sin x)^{10}\sin x\cos x\,dx$ 의 값을 구하라.

(3) (10점) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2e^x-1}{x^2e^x+x}\,dx$ 의 값을 구하라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) $\displaystyle\lim_{r\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{r}=3$일 때 c의 값을 구하라.

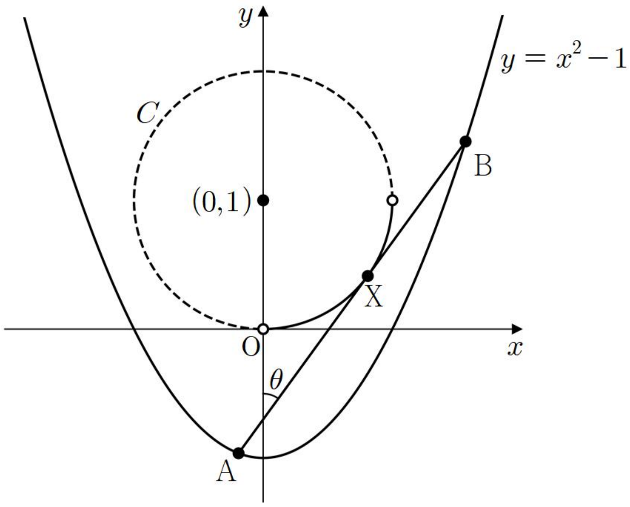
(2) (10점) 자연수 n에 대하여 $c=\left(\frac{1}{2}\right)^n$일 때, 점 S의 x좌표를 $h(r)$이라 하자. $\displaystyle\lim_{r\to 0+}h(r)=\frac{1}{2048}$인 n의 값을 구하라.

[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

【 제시문 】

점 $\mathrm{P}(0, p)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하고, 원 C가 곡선 $y = x^2 - 1$과 만나지 않는다고 하자. (단, $p > \frac{1}{4}$)

원 C 위의 점 $\mathrm{X}(a, b)$에 대하여 $a > 0$이고 $p-1 < b < p$이다. 원 C 위의 점 X에서의 접선과 곡선 $y = x^2 - 1$의 서로 다른 두 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 AB가 y축과 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. 이때 $t = \frac{1}{\sin\theta}$이라 두고 $\overline{\mathrm{AB}}^2$을 t에 대한 식으로 나타낸 것을 $f(t)$라 하자. 【그림 2】는 $p = 1$일 때 원 C와 선분 AB를 나타낸 예이다.



【그림 2】

[문제 2-1] (20점) 다음 물음에 답하라.

(1) (8점) 점 X의 좌표를 θ와 p에 관한 식으로 나타내라.

(2) (12점) $f(t)$를 구하라.

[문제 2-2] (20점) $f(t) = 12$일 때, 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) $p=1$일 때, 점 X의 좌표를 구하라.

(2) (10점) 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$에서의 접선과 직선 AB가 평행할 때 p의 값을 구하라.

[문제 2-3] (10점) $f(t_1)=f(t_2)$인 서로 다른 실수 t_1과 t_2가 존재하는 모든 p의 값의 범위를 구하라.

(단, $1 < t_1 < t_2$)

2025학년도 논술고사

자연계열(오전) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 3

2025학년도 자연계열(오전) 모범답안

자연계열 (오전)

[문제 1-1]

(1) $1+\sin x-\sin^3 x-\sin^4 x=(1+\sin^2 x)(1-\sin^2 x)+\sin x(1-\sin^2 x)=\cos^2 x(1+\sin x+\sin^2 x)$이므로, $\dfrac{1+\sin x-\sin^3 x-\sin^4 x}{\cos^4 x}=\dfrac{1+\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=(2\sec^2 x-1)+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$이다. $\cos x=t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ 이고, 치환적분법에 의하여 주어진 적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x-1)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx=\Big[\,2\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t^2}\,dt=\left(2-\frac{\pi}{4}\right)+\left[\frac{1}{t}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1+\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$$

(2) $1+2\sin x=t$라 하면, $\dfrac{dt}{dx}=2\cos x$ 이므로 치환적분법을 적용하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+2\sin x)^{10}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{4}\int_1^2 t^{10}(t-1)\,dt=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}t^{12}-\frac{1}{11}t^{11}\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{48}(2^{12}-1)-\frac{1}{44}(2^{11}-1)=\frac{6827}{176}$$

(3) $\dfrac{x^2e^x-1}{x^2e^x+x}=\dfrac{e^x-\frac{1}{x^2}}{e^x+\frac{1}{x}}$이다. $e^x+\dfrac{1}{x}=t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x-\dfrac{1}{x^2}$이므로 치환적분법을 적용하면 다음과 같다.

$$\int_1^2\frac{x^2e^x-1}{x^2e^x+x}\,dx=\int_1^2\frac{e^x-\frac{1}{x^2}}{e^x+\frac{1}{x}}\,dx=\int_{e+1}^{e^2+\frac{1}{2}}\frac{1}{t}\,dt=\Big[\,\ln t\Big]_{e+1}^{e^2+\frac{1}{2}}=\ln\frac{2e^2+1}{2e+2}$$

[문제 1-2]

(1) 원 C의 방정식은 $x^2-2cx+y^2=0$이고 점 Q의 x좌표를 구하기 위해 $x^2-2cx+r^2x^2=0$을 풀면, $x=\dfrac{2c}{1+r^2}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{2c}{1+r^2},\dfrac{2cr}{1+r^2}\right)$이다. 같은 방법으로 점 R의 좌표는$\left(\dfrac{2c}{1+r^2},-\dfrac{2cr}{1+r^2}\right)$ 이다. 이때 $\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{4cr}{1+r^2}$이므로 $\lim\limits_{r\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{r}=\lim\limits_{r\to0+}\dfrac{4cr}{r(1+r^2)}=\lim\limits_{r\to0+}\dfrac{4c}{1+r^2}=4c$ 이며, $\lim\limits_{r\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{r}=3$로부터, $c=\dfrac{3}{4}$이다.

(2) (1)에서 구한 두 점 P, Q의 좌표로부터 두 점을 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$y=\frac{\frac{2cr}{1+r^2}-\sqrt{r}}{\frac{2c}{1+r^2}}x+\sqrt{r}=\frac{2cr-\sqrt{r}(1+r^2)}{2c}x+\sqrt{r}$$

이 직선이 점 $\mathrm{S}(h(r),0)$을 지나므로 $h(r)=\dfrac{-2c\sqrt{r}}{2cr-\sqrt{r}(1+r^2)}=\dfrac{2c}{1+r^2-2c\sqrt{r}}$이고 $\lim\limits_{r\to0+}h(r)=2c$이다. $c=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$이므로 $2c=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2048}$이다. 따라서 $n=12$이다.

[문제 2-1]

(1) 직선 AB와 y축의 교점을 점 T라 하고, 점 X에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle \mathrm{TPX} = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로 $\overline{\mathrm{HX}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$, $\overline{\mathrm{HP}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$이다. $a = \overline{\mathrm{HX}}$, $b = \overline{\mathrm{OP}} - \overline{\mathrm{HP}}$ 이므로 $a = \cos\theta$, $b = p - \sin\theta$ 이다.

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $t = \frac{1}{\sin\theta} > 1$이다. 점 $\mathrm{P}(0, p)$, 점 $\mathrm{X}(\cos\theta, p - \sin\theta)$에 대하여 점 X에서 원 C에 접하는 접선의 방정식은 $y = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}x - \frac{1}{\sin\theta} + p$ 이다. 이 접선이 곡선 $y = x^2 - 1$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $(\sin\theta)x^2 - (\cos\theta)x - (1+p)\sin\theta + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 $(\alpha + \beta)^2 = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} = t^2 - 1$, $\alpha\beta = \frac{1}{\sin\theta} - (1+p) = t - 1 - p$이다. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = t^2 - 1 - 4(t - 1 - p) = t^2 - 4t + 4p + 3$이므로 다음이 성립한다.

$$f(t) = \overline{\mathrm{AB}}^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha - \beta)^2(1 + (\alpha + \beta))^2 = t^2(t^2 - 4t + 4p + 3)$$

[문제 2-2]

(1) $p = 1$, $f(t) = 12$ 에 의해 $f(t) = t^2(t^2 - 4t + 7) = 12$이고, 이를 정리하면 $(t-2)(t+1)(t^2 + 3t + 3) = 0$이다. $t > 1$, $t^2 + 3t + 3 = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$이므로 $t = 2$이다. $t = \frac{1}{\sin\theta} = 2$에서 $\sin\theta = \frac{1}{2}$이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. [문제 2-1] (1)에 의하여 점 X의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

(2)

점 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$에서의 $y = x^2 - 1$에 대한 접선의 기울기가 1이다. 직선 AB의 기울기는 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$이고, 점 Q에서의 접선과 직선 AB가 평행하므로 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$이다. $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때, $t = \sqrt{2}$이므로 $f(\sqrt{2}) = 2(2 - 4\sqrt{2} + 3 + 4p) = 12$에서 $p = \frac{1}{4} + \sqrt{2}$이다.

[문제 2-3] $f(t) = t^2(t^2 - 4t + 4p + 3)$이고 $f'(t) = 2t(2t^2 - 6t + 4p + 3)$이므로 $p < \frac{3}{8}$이면 다음이 성립한다.

$$f'(t) = 4t\left(t - \frac{3 - \sqrt{3 - 8p}}{2}\right)\left(t - \frac{3 + \sqrt{3 - 8p}}{2}\right)$$

$\alpha = \frac{3 - \sqrt{3 - 8p}}{2}$, $\beta = \frac{3 + \sqrt{3 - 8p}}{2}$라 하면 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘		↗

$\beta > 1$이므로 사차함수의 그래프의 개형에 의해 $f(t_1) = f(t_2)$인 서로 다른 실수 t_1과 t_2가 존재한다. $p \geq \frac{3}{8}$이면 $t > 1$에서 $f'(t) > 0$이므로 사차함수의 그래프의 개형에 의해 $f(t_1) = f(t_2)$인 서로 다른 실수 t_1과 t_2가 존재하지 않는다. 따라서 $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{8}$이다.

2025학년도 논술고사

자연계열(오전) 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 2

2025학년도 자연계열(오전) 채점기준

자연계열 (오전)

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	주어진 적분을 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$ 정도로 간단히 정리함	3점
	각각의 부정적분을 올바르게 구함	3점
	답을 올바르게 구함	4점
[1-1] (2)	치환적분법을 활용하여 주어진 적분식을 올바르게 변형함	5점
	답을 올바르게 구함	5점
[1-1] (3)	치환적분법을 활용하여 주어진 적분식을 올바르게 변형함	5점
	답을 올바르게 구함	5점
[1-2] (1)	점 Q와 점 R의 좌표를 구하기 위한 방정식을 올바르게 세움	3점
	$\overline{\mathrm{QR}}=\frac{4cr}{1+r^2}$임을 관찰	3점
	답을 올바르게 구함	4점
[1-2] (2)	$h(r)$을 올바르게 구함	4점
	극한이 $2c$임을 관찰함	3점
	답을 올바르게 구함	3점

2025학년도 자연계열(오전) 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$a=\cos\theta$를 올바르게 구함	4점
	$b=p-\sin\theta$를 올바르게 구함	4점
[2-1] (2)	점 X에서 원 C에 접하는 접선의 방정식 $y=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x-\frac{1}{\sin\theta}+p$ 를 올바르게 구함	4점
	$(\alpha+\beta)^2=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=t^2-1$, $\alpha\beta=\frac{1}{\sin\theta}-(1+p)=t-1-p$ 임을 관찰함	4점
	$f(t)$를 올바르게 구함	4점
[2-2] (1)	풀어야 하는 방정식이 방정식 $t^4-4t^3+7t^2-12=0$임을 구함	2점
	$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=2$를 관찰함	4점
	점 X의 좌표 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$를 올바르게 구함	4점
[2-2] (2)	점 Q에서의 접선의 기울기 1을 올바르게 구함	3점
	$\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\sqrt{2}$을 관찰함	4점
	$p=\frac{1}{4}+\sqrt{2}$를 올바르게 구함	3점
[2-2] (3)	$f'(t)$를 올바르게 구함	2점
	$f'(t)$로부터 $f(t)$의 개형을 관찰함	4점
	$\frac{1}{4}<p<\frac{3}{8}$을 올바르게 구함	4점