2025학년도 모의논술고사

자연계열
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항 1]

【 풀이 】

[문제 1-1]

(1) 영역 A는 직선 PN에 의해 두 부분으로 나뉘고, 각 영역의 넓이를 정적분으로 나타내어 보면,

$$\int_0^a (x^2-x^3)\,dx = \frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4},$$

$$\int_a^{\sqrt{a}} (ax-x^3)\,dx = \frac{a}{2}(a-a^2)-\frac{a^2}{4}+\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{2}+\frac{a^4}{4}$$

이다. 이로부터 $S(a) = \int_0^a (x^2-x^3)\,dx+\int_a^{\sqrt{a}} (ax-x^3)\,dx = \frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{6}$이고, 5점

$S_1(a) = \int_a^{\sqrt{a}} (ax-x^3)\,dx = \frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{2}+\frac{a^4}{4}$이다. 2점

따라서, $\lim_{a\to 0+}\frac{S(a)}{S_1(a)} = \lim_{a\to 0+}\frac{\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{6}}{\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{2}+\frac{a^4}{4}} = \lim_{a\to 0+}\frac{\frac{1}{4}-\frac{a}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}} = 1$이다. 3점

(2) 풀이 (1)에서 구한 도형 A의 넓이는 $S(a) = \int_0^a (x^2-x^3)\,dx+\int_a^{\sqrt{a}} (ax-x^3)\,dx = \frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{6}$이다.

그러므로 $S(a) = \frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{6} = \frac{1}{24}$을 풀면 5점

$a = \frac{1}{2}$이다. 5점

[문제 1-2]

(1) ℓ_1의 방정식은 $ax+a^2y = a^2+a^4$이며 그 기울기는 $-\frac{1}{a}$이고 ℓ_2의 방정식은 $y-a^2 = 2a(x-a)$이며 그 기울기는 $2a$이다. 4점

직선 ℓ_1, ℓ_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하면 두 직선이 이루는 각은 $(\alpha-\beta)$이고 삼각함수의 덧셈정리와 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의하여 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{-\frac{1}{a}-2a}{1+\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot 2a} = \frac{1}{a}+2a \ge 2\sqrt{2}$$ 4점

등호는 $\frac{1}{a} = 2a$일 때, 즉 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 성립하므로, 두 접선은 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 각의 크기가 최소이다. 2점

(2) 제시문으로부터 $C: x^2+y^2=(a^2+a^4)$이다. 한편,

$$(a+a^2)^2+((a+a^2)^3)^2 > (a+a^2)^2 \geq a^2+a^4 \qquad \boxed{4점}$$

이므로 점 $(a+a^2,(a+a^2)^3)$은 원 C의 외부에 있음을 알 수 있다. $\boxed{4점}$

(3) 풀이 (2)에 의하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_0^a (x^2-x^3)\,dx \leq T(a) \leq \int_0^{a+a^2} (x^2-x^3)\,dx$$

즉, 아래 부등식이 성립한다.

$$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4 \leq T(a) \leq \frac{1}{3}a^3+\frac{3}{4}a^4-\frac{7}{6}a^6-a^7-\frac{1}{4}a^8 \qquad \boxed{6점}$$

양변을 a^3으로 나누고 함수의 극한의 대소관계를 이용하면, 다음이 성립한다.

$$\lim_{a\to 0+}\frac{T(a)}{a^3}=\frac{1}{3} \qquad \boxed{3점}$$

3이 아닌 자연수 m에 대해서는 극한값이 존재하지 않거나 0이 된다. 따라서 $m=3$이고 극한값은 $\frac{1}{3}$이다. $\boxed{3점}$

[문항 2]

【 풀이 】

[문제 2-1]

(1) 함숫값 $f(1), f(2), \cdots, f(9)$을 차례로 나열하면 $4,2,3,3,2,4,4,3,1$이므로, f의 반복쌍은 $(2,3)$과 $(4,3)$뿐임을 관찰할 수 있다. 각 5점

(2) $1 \le i \le 6$일 때, $g(i) = f(i)$이고, $7 \le i \le n-2$일 때 $g(i) = 4$이고, 6점
$g(n-1) = f(8)$, $g(n) = f(9)$로 정의되는 함수 g는 주어진 조건을 만족한다. 4점

[문제 2-2]

(1) N_4의 서로 다른 두 자연수 s와 t로 이루어진 모든 순서쌍 (s,t)가 반복쌍인 함수 f가 존재한다고 하자. 함숫값 $f(1), f(2), \cdots, f(m)$을 차례로 나열했을 때 $1,2,3,4$가 각각 적어도 두 번 나타나야 한다. 편의상 $a_i = f(i)$라 적자. a_1이 함숫값의 나열에서 정확히 두 번 나타나면, a_1이 아닌 임의의 원소 b에 대하여, (b, a_1)이 반복쌍이 될 수 없으므로, a_1은 함숫값의 나열에서 세 번 이상 나타난다. $a_i \ne a_1$인 가장 작은 i를 고르자. a_1, a_i가 아닌 임의의 원소 b에 대하여, (b, a_i)가 반복쌍이려면, a_i는 함숫값의 나열에서 세 번 이상 나타나야 한다. 마찬가지로, $a_j \ne a_1, a_i$인 가장 작은 j를 고르자. a_1, a_i, a_j가 아닌 임의의 원소 b에 대하여, (b, a_j)가 반복쌍이려면 a_j이 함숫값의 나열에서 세 번 이상 나타난다. 즉 m은 11이상이어야 한다. 7점
예를 들어 $g(1), g(2), \cdots, g(11)$을 차례로 나열한 것이 $1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3$인 함수 $g : N_{11} \to N_4$에 대하여 N_4의 서로 다른 두 자연수 s와 t로 이루어진 모든 순서쌍 (s,t)가 g의 반복쌍이다. 따라서 m의 최솟값은 11이다. 3점

(2) 귀류법으로 증명하자. 반복쌍의 집합이 $\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$인 함수 f가 존재한다고 가정하자. $f(1), f(2), \cdots, f(m)$을 차례로 나열한 것을 생각하자. $f(1), f(2), \cdots, f(k)$에서 반복쌍이 나타나는 가장 작은 k를 생각하자. 예를 들어 그때의 반복쌍을 $(1,2)$라 하자. 또한 k의 성질과 반복쌍의 집합의 성질에 의하여, $f(1), f(2), \cdots, f(k)$에서 반복쌍은 정확히 하나뿐이다. 5점
한편 $(4,1)$이 반복쌍이므로, $f(k+1), f(k+2), \cdots, f(m)$에 1이 나타난다. 그러면 $(2,1)$이 f의 반복쌍이 되어 반복쌍이 $(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)$뿐이라는 조건에 모순이다. $f(1), f(2), \cdots, f(k)$에서 나타나는 반복쌍이 $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,1)$인 경우도 같은 방법으로 증명된다. 5점

[문제 2-3]

치역의 원소의 개수가 1인 경우의 수는 n이다. 치역의 원소의 개수가 2인 경우를 생각하자. 조건을 만족하려면 함숫값 $f(1), f(2), \cdots, f(n)$을 차례로 나열했을 때 숫자가 두 번 이하로 바뀌어야 한다. 숫자가 한 번 바뀌는 경우는 첫 번째 자리를 제외한 $(n-1)$개의 자리 중 숫자가 바뀔 한 자리를 고르는 경우를 살펴야 하고, 숫자가 두 번 바뀌는 경우는 $(n-1)$개의 자리 중 숫자가 바뀔 두 자리를 고르는 경우가 된다. 따라서, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n + n(n-1) \times \left({}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 \right) \\ &= n + n(n-1)\left(n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) = n + \frac{n^2(n-1)^2}{2} \end{aligned}$$

6점

이로부터 $\dfrac{a_n}{n} = 1 + \dfrac{n(n-1)^2}{2}$ 이므로 $\dfrac{a_n}{n} > 2025$을 계산하면, $n \geq 17$이어야 한다. 따라서 구하는 n의 최솟값은 17이다.

4점