2024학년도 논술고사

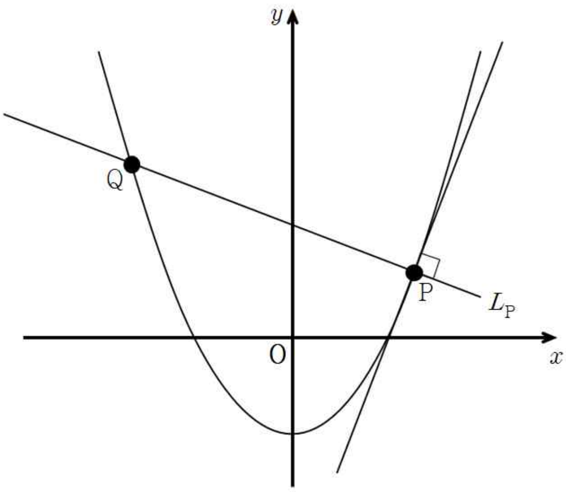
자연계열(오후)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

(가) 곡선 $C: y = x^2 - 1$과 C 위의 x좌표가 양수인 점 $\mathrm{P}(t, t^2-1)$이 있다. [그림 1]과 같이 곡선 C 위의 점 P에서의 접선에 수직이며 점 P를 지나는 직선을 L_{P}라 하고, 곡선 C와 직선 L_{P}의 교점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.



[그림 1]

곡선 C와 직선 L_{P}로 둘러싸인 도형의 $x \geq 0$인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. 직선 L_{P}와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ(라디안)라 하면 $t = \dfrac{1}{2\tan\theta}$이다. 따라서 $S(t)$를 θ에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

(나) 선분 PQ 위의 점 중에서 점 $\mathrm{P}(t, t^2-1)$과의 거리가 1인 점을 R이라 하고, 점 R의 x좌표와 y좌표를 매개변수 t로 나타낸 함수를 각각 $x(t)$, $y(t)$라 하자.

[문제 1-1] (27점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

(1) (6점) $S(t)$를 t에 대한 다항식으로 나타내시오.

(2) (8점) $t=1$일 때, θ에 대한 $S(t)$의 순간변화율을 구하시오.

(3) (13점) $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하시오.

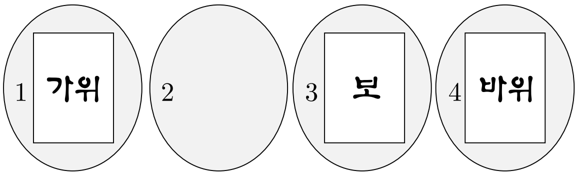
[문제 1-2] (23점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하시오.

(1) (10점) 함수 $x(t)$와 $y(t)$를 구하시오.

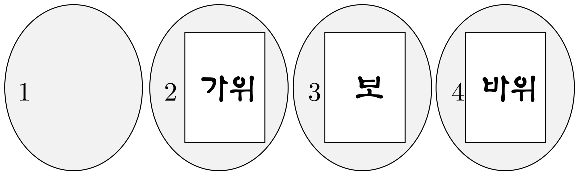
(2) (13점) 시각 t에서 점 R의 위치를 $(x(t), y(t))$라 하자. 시각 $t=1$에서 $t=s$까지 점 R이 움직인 거리를 $l(s)$라 할 때, $\lim_{s \to 2} \frac{l(s)-l(2)}{s^2-4}$의 값을 구하시오. (단, $s>1$)

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

(가) 서로 다른 세 장의 카드 ‘가위카드’, ‘바위카드’, ‘보카드’와 1번에서 n번$(n \geq 3)$까지 차례대로 번호가 적혀있는 n개의 자리가 있다. 이 카드 세 장을 서로 다른 자리에 한 장씩 놓는 것을 ‘카드배열’이라 하고 어떤 두 카드의 자리 번호의 차가 1이면 두 카드는 ‘이웃한다’고 하자. 예를 들어 $n=4$일 때, [그림 2]와 [그림 3]의 카드배열은 서로 다른 배열이다. [그림 2]의 카드배열에서 보카드와 바위카드는 이웃하고 가위카드와 보카드는 이웃하지 않는다.

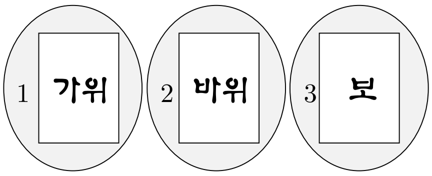


[그림 2]



[그림 3]

(나) $n=3$일 때, 카드의 이름을 차례로 써서 카드배열을 나타내자. 예를 들어 [그림 4]의 카드배열은 (가위/바위/보)로 나타낸다.



[그림 4]

$n=3$이고 정의역과 공역이 모두 $\{1,2,3\}$인 함수 f가 주어졌을 때, 다음 <규칙>을 따르는 카드배열을 ‘f-카드배열’이라 하자. 가위카드는 보카드를 이기고 보카드는 바위카드를 이기며 바위카드는 가위카드를 이긴다.

<규칙>

① 1번 자리에 놓인 카드를 이기는 카드는 자리 번호가 $f(1)$ 이하이다.
② 2번 자리에 놓인 카드를 이기는 카드는 자리 번호가 $f(2)$ 이하이다.
③ 3번 자리에 놓인 카드를 이기는 카드는 자리 번호가 $f(3)$ 이하이다.

예를 들어 함수 $f:\{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$에 대하여 $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=2$이면 (바위/보/가위)는 f-카드배열이다. (가위/보/바위)는 가위카드가 놓인 자리 번호가 1이므로 바위카드의 자리 번호는 $f(1)=2$ 이하이어야 하는데 그렇지 않으므로 f-카드배열이 아니다.

[문제 2-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

(1) (5점) $n=7$일 때, 카드배열의 개수를 구하시오.

(2) (5점) $n=9$일 때, 다음을 만족시키는 카드배열의 개수를 구하시오.

(가위카드의 자리 번호) < (바위카드의 자리 번호) < (보카드의 자리 번호)

(3) (5점) $n=11$일 때, 가위카드와 보카드가 이웃하는 카드배열의 개수를 구하시오.

[문제 2-2] (35점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하시오.

(1) (10점) 함수 $f:\{1,2,3\}\rightarrow\{1,2,3\}$에 대하여 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=3$일 때, f-카드배열을 모두 구하시오.

(2) (12점) $g(1)=2$이고 g-카드배열이 존재하도록 하는 함수 $g:\{1,2,3\}\rightarrow\{1,2,3\}$을 모두 구하시오.

(3) (13점) 명제 '모든 카드배열이 h-카드배열이다.'가 참이 되도록 하는 함수 $h:\{1,2,3\}\rightarrow\{1,2,3\}$을 모두 구하시오. (단, $n=3$)

2024학년도 논술고사

자연계열(오후) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 3

[문항 1]

[문제1-1]

(1) 직선 L_P의 방정식은 $y=-\frac{x}{2t}+t^2-\frac{1}{2}$이므로 구하는 영역의 넓이는

$$S(t)=\int_0^t\left(-\frac{x}{2t}+t^2-\frac{1}{2}-x^2+1\right)dx=\frac{2}{3}t^3+\frac{t}{4}\ \text{이다.}$$

(2) $t=\frac{1}{2\tan\theta}=\frac{\cot\theta}{2}$이므로 합성함수의 미분법에 의하여 $S'(t)\times\frac{dt}{d\theta}=\left(2t^2+\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{\csc^2\theta}{2}\right)$이다.

$t=1$일 때 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이고 $\csc\theta=\sqrt{5}$이므로, 구하는 값은 $-\frac{45}{8}$이다.

(별해) $t=\frac{1}{2\tan\theta}$이므로 θ에 대한 함수로 나타낸 $S(t)$를 $f(\theta)$라 하면,

$S(t)=f(\theta)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2\tan\theta}\right)^3+\frac{1}{8\tan\theta}=\frac{1}{12}\cot^3\theta+\frac{1}{8}\cot\theta$이므로 $f'(\theta)=-\frac{1}{8}\csc^2\theta(2\cot^2\theta+1)$이다.

$t=1$일 때 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이고 $\cot\theta=2, \csc\theta=\sqrt{5}$이므로, 구하는 값은 $-\frac{45}{8}$이다.

(3) 직선 L_P와 곡선 C의 교점의 x좌표를 구하면 $-t-\frac{1}{2t}$, t이다. 따라서 점 Q의 x좌표는 $-t-\frac{1}{2t}$이다. 점 P의 x좌표와 점 Q의 x좌표의 차를 c라 하면 $c=2t+\frac{1}{2t}=\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta$이다. $\cos\theta=\frac{c}{\overline{PQ}}$이므로 $\overline{PQ}=\frac{c}{\cos\theta}=\left(\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta\right)\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}$ 이다.

$a=\sin\theta$라 하면 θ는 예각이므로 $0<a<1$이다. 따라서 $\overline{PQ}=\frac{1}{a(1-a^2)}$이고 $0<a<1$에서 $a(1-a^2)$의 최댓값을 가질 때 $\overline{PQ}$는 최솟값을 가진다. $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$에서 $a(1-a^2)$는 최댓값 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$를 갖는다. 그러므로 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

[문제1-2]

(1) 점 R을 $(t+a, t^2-1+b)$라 두자. 두 점 P, R은 직선 L_P 위에 있으므로 L_P의 기울기는 $\frac{b}{a}=-\frac{1}{2t}$이다. 또한 점 P와 점 R의 거리가 1이므로 $1=a^2+b^2=a^2\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)$이다. 이때 t는 양수이고 점 R의 x좌표는 t보다 작아야 하므로 $a=-\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}$이다. 따라서 점 R의 x좌표와 y좌표를 매개변수 t로 나타낸 함수는 $x(t)=t-\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$, $y(t)=t^2-1+\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}$ 이다.

(2) $x'(t)=1-\frac{2}{\left(\sqrt{4t^2+1}\right)^3}$이고 $y'(t)=2t-\frac{4t}{\left(\sqrt{4t^2+1}\right)^3}=2t\left(1-\frac{2}{\left(\sqrt{4t^2+1}\right)^3}\right)$이므로

$$l(s) = \int_1^s \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_1^s \left(\sqrt{1+4t^2} - \frac{2}{4t^2+1} \right) dt$$

이다. 정적분과 미분의 관계에 의하여

$$l'(s) = \frac{d}{ds} l(s) = \frac{d}{ds} \int_1^s \left(\sqrt{1+4t^2} - \frac{2}{4t^2+1} \right) dt = \sqrt{1+4s^2} - \frac{2}{4s^2+1}$$

이다. 따라서

$$\lim_{s \to 2} \frac{l(s) - l(2)}{s^2-4} = \lim_{s \to 2} \left(\frac{1}{s+2} \right) \left(\frac{l(s) - l(2)}{s-2} \right) = \frac{1}{4} l'(2) = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{34}$$ 이다.

[문항 2]

[문제 2-1]

(1) 일곱개의 자리에서 세 자리를 고른 후에 카드 세 장을 차례로 나열하는 경우의 수이므로 ${}_7\mathrm{P}_3 = 210$이다.

(2) 아홉 개의 자리에서 세 자리를 고르는 경우의 수와 같으므로 ${}_9\mathrm{C}_3 = 84$이다.

(3) 두 카드가 이웃하기 위해서는 두 카드의 자리 번호는 1과 2, 2와 3, …, 10과 11 이렇게 열 가지 중 하나이어야 한다. 가위/보 또는 보/가위를 배치한 후에 '바위'를 남은 아홉 자리 중 한 자리에 배치하면 된다. 따라서 답은 $10 \times 2 \times 9 = 180$이다.

[문제 2-2]

(1) 1번 자리에 임의의 카드 한 장을 놓으면 그 카드를 이기는 카드는 반드시 2번 자리에 놓아야 하고, $f(2) = 3$이므로 2번 자리의 카드를 이기는 카드는 남은 3번 자리에 놓으면 $f(3) = 3$이므로 f-카드배열이다. 따라서 (가위/바위/보), (바위/보/가위), (보/가위/바위) 이렇게 3개의 f-카드배열이 있다.

(2) $g(2) \neq 3$일 때 g-카드배열 (A/B/C)가 존재한다고 하자. $g(2) \neq 3$이므로 B를 이기는 카드는 A이다. $g(1) = 2$이므로 A를 이기는 카드는 B가 되어 모순이다. 따라서 $g(2) \neq 3$일 때 g-카드배열은 존재하지 않는다. $g(2) = 3$이면 $g(3)$의 값에 관계없이 (가위/바위/보)는 g-카드배열이다. 따라서 답은

- $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$
- $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 2$
- $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 3$

이다.

(3) $h(1) \neq 3$이면 (가위/보/바위)가 h-카드배열이 아니다. 그러므로 $h(1) = 3$이다. $h(2) \neq 3$이면 (보/가위/바위)가 h-카드배열이 아니다. 그러므로 $h(2) = 3$이다. $h(3) = 1$이면 (보/바위/가위)가 h-카드배열이 아니다. 따라서 $h(1) = 3$, $h(2) = 3$이고 $h(3) = 2$ 또는 $h(3) = 3$이다.

(i) $h(1) = 3, h(2) = 3, h(3) = 2$이면 임의의 카드배열을 생각하자. $h(1) = 3, h(2) = 3$이므로 규칙 ①, ②를 따른다. 3번 자리의 이기는 카드는 이미 1번 또는 2번 자리에 있고 $h(3) = 2$이므로 규칙 ③도 따른다. 따라서 모든 카드배열이 h-카드배열이다.

(ii) $h(1)=3, h(2)=3, h(3)=3$은 어떤 제약 조건도 없으므로 모든 카드배열이 h-카드배열이다.
따라서 답은 $h(1)=3, h(2)=3, h(3)=3$과 $h(1)=3, h(2)=3, h(3)=2$ 이다.

2024학년도 논술고사

자연계열(오후) 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 2

2024학년도 자연계열(오후) 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	직선 L_{P}의 방정식을 구함	2점
	$S(t)$의 식을 적음	2점
	정적분을 올바르게 계산함	2점
[1-1] (2)	합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구함	3점
	θ가 예각임을 이용하여 필요한 삼각함수의 값을 올바르게 구함	3점
	도함수와 삼각함수의 값을 이용하여 답을 올바르게 구함	2점
[1-1] (3)	Q의 x좌표 혹은 점 P, Q의 x좌표의 차를 올바르게 구함	4점
	$\overline{\mathrm{PQ}}$를 θ에 관한 식으로 표현	4점
	$\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구함	5점

하위 문항	채점 기준	배점
[1-2] (1)	a와 b가 만족하는 관계식을 구함(L_{P}를 활용하여 점 R의 위치를 올바르게 표현)	5점
	$x(t)$와 $y(t)$를 올바르게 구함	5점
[1-2] (2)	$x'(t)$와 $y'(t)$를 올바르게 구함	4점
	$l(s)$를 적분식으로 나타냄	2점
	$l'(2)$의 값을 올바르게 구함	4점
	극한을 이해하여 정답을 올바르게 구함	3점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	순열임을 관찰하고 정답을 올바르게 구함	5점
[2-1] (2)	조합임을 관찰하고 정답을 올바르게 구함	5점
[2-1] (3)	이웃하는 카드가 있는 경우에 대한 의미있는 관찰	2점
	곱의 법칙을 이해하여 정답을 올바르게 구함	3점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-2] (1)	정의를 이용하여 f-카드배열이 되는 의미있는 조건을 관찰함	6점
	f-카드배열을 이해하여 정답을 올바르게 구함	4점
[2-2] (2)	$g(2) \neq 3$에 대한 카드배열의 성질을 올바르게 관찰함	4점
	$g(2) = 3$에 대한 카드배열의 성질을 올바르게 관찰함	4점
	정답을 올바르게 구함 4점	4점
[2-2] (3)	$h(1) = 3$을 관찰	4점
	$h(2) = 3$을 관찰	4점
	$h(3) = 2$ 또는 $h(3) = 3$일 때 명제가 참임을 관찰	5점