2024학년도 논술고사

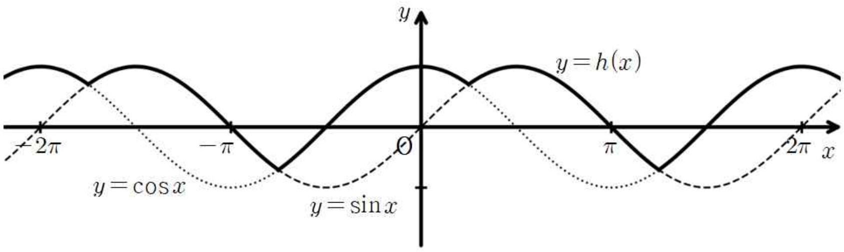
자연계열(오전)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

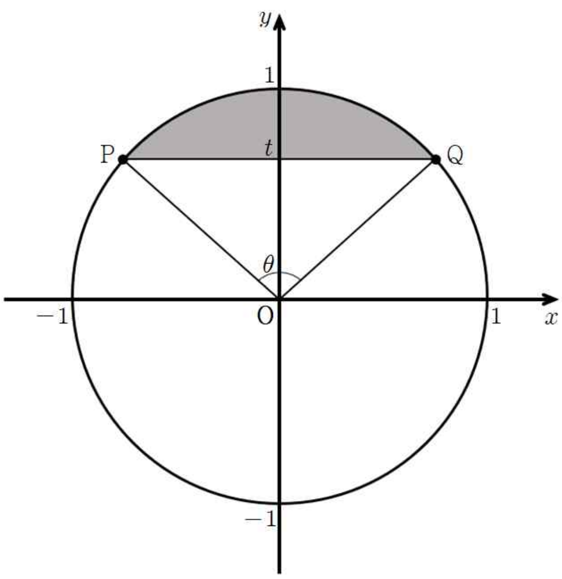
[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$의 값을 $f(x)$의 값과 $g(x)$의 값 중 작지 않은 값으로 정의하자. 예를 들어 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$이면 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

(나) $0 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 원 $C: x^2+y^2=1$이 만나는 점을 x좌표가 크지 않은 순서대로 P와 Q라 하고 각 POQ의 크기를 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$라 하자. 이때 $t=1$이면 점 P와 점 Q는 같은 점이며 $\theta=0$이다. [그림 2]의 색칠된 도형과 같이 원 C가 선분 PQ에 의하여 나뉘는 두 부분 중 윗부분의 도형을 생각하자. 이 도형의 넓이를 $A(\theta)$라 하고 둘레의 길이를 $B(\theta)$라 하자. (단, 각의 크기의 단위는 라디안이다.)



[그림 2]

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

(1) (8점) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2$ 이고 $g(x) = \log_2 x$ 일 때, 닫힌구간 $[2,3]$ 에서 $h(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(2) (12점) $f(x) = \sin 2x$ 이고 $g(x) = \dfrac{3}{4}\cos x$ 일 때, 열린구간 $(-\pi, \pi)$ 에서 함수 $h(x)$ 가 극솟값을 갖는 x 의 값 중 가장 큰 값을 α 라 하자. $\tan\alpha$ 의 값을 구하시오.

[문제 1-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하시오.

(1) (8점) $t = \dfrac{1}{3}$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값을 구하시오.

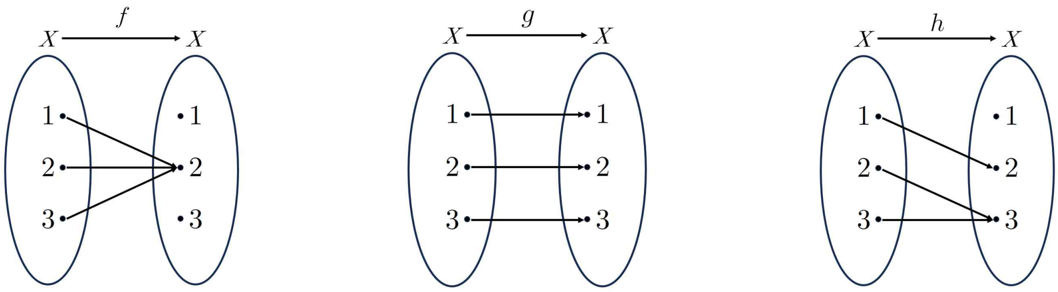
(2) (10점) $\displaystyle\int_0^{\pi} A(\theta)\, d\theta$ 의 값을 구하시오.

(3) (12점) $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{B(\theta)}{\sin\theta}$ 의 값을 구하시오.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

공집합이 아닌 집합 X에 대하여 정의역과 공역이 같은 함수 $f : X \to X$가 있다. 이때 f가 상수함수이면 f를 '1-상수함수', $f \circ f$가 상수함수이면 f를 '2-상수함수', $f \circ f \circ f$가 상수함수이면 f를 '3-상수함수'라 하자. 이와 같은 방법으로 자연수 n에 대하여 'n-상수함수'를 정의하자.

예를 들어 $X = \{1, 2, 3\}$일 때 [그림 3]과 같은 대응으로 정의된 세 함수 f, g, h를 생각하자. 함수 f는 상수함수이므로 모든 자연수 n에 대하여 n-상수함수이다. 함수 g는 항등함수이므로 모든 자연수 n에 대하여 n-상수함수가 아니고, 함수 $h \circ h$는 함숫값이 3인 상수함수이므로 h는 2-상수함수이다.



[그림 3]

[문제 2-1] (20점) $X = \{n \mid n\text{은 자연수}\}$일 때 물음에 답하시오.

(1) (8점) 함수 $f : X \to X$ 는 $f(3) = 3$인 2-상수함수이다. 자연수 n에 대하여 $a_n = (f \circ f \circ f)(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{2024} a_n$의 값을 구하시오.

(2) (12점) 자연수 k에 대하여 함수 $f : X \to X$ 는 $f(n) = \begin{cases} n+3 & (n < k) \\ k+3 & (n \geq k) \end{cases}$라 하자. f가 2-상수함수는 아니면서 3-상수함수가 되도록 하는 k를 모두 구하시오. (단, $k > 1$)

[문제 2-2] (15점) 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$일 때, 다음 <조건>을 만족시키는 4-상수함수 $f : X \to X$를 모두 구하시오.

<조건>

① $(f \circ f \circ f \circ f)(1) = 4$
② $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$

[문제 2-3] (15점) 집합 $X = \{1, 2, 3\}$일 때, 명제 '어떤 자연수 n에 대하여 함수 $g : X \to X$는 n-상수함수이다.'가 참이 되도록 하는 함수 $g : X \to X$의 개수를 구하시오.

2024학년도 논술고사

자연계열(오전)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 3

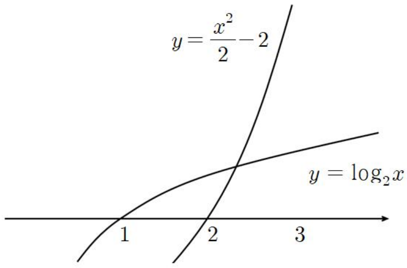
2024학년도 자연계열(오전) 모범답안

자연계열
(오전)

[문항 1]

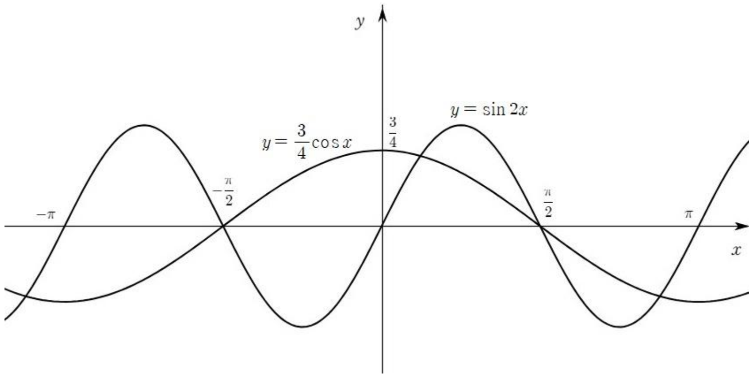
[문제 1-1]

(1) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g(3)<2<f(3)$이므로 닫힌구간 $[2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(3)=f(3)=\frac{5}{2}$이다. $f(2)=0<g(2)=1$이므로 닫힌구간 $[2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(2)=g(2)=1$이다.

(2) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 열린구간 $(-\pi,\pi)$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 가장 큰 값이 α이고 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha$이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$이므로 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha$이다. $\cos\alpha\neq 0$이므로 $\sin\alpha=\frac{3}{8}$이다. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$이므로 $\tan\alpha=-\frac{3\sqrt{55}}{55}$이다.

[문제 1-2]

(1) 점 P와 점 Q는 원 C 위의 점이므로 두 점의 x좌표를 구하면 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$와 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. 즉, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다. 따라서 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$이다. 한편 삼각형 OPQ는 두 변의 길이가 1이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형이므로 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin\theta$이다. 따라서 $\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$이다.

(2) $0<\theta<\pi$일 때, 반지름이 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{\theta}{2}$이고, 길이가 1인 두 변의 끼인각의 크기가 θ인 삼각형 POQ의 넓이는 $\frac{\sin\theta}{2}$이므로 $A(\theta)=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{2}$이다. $\theta=0$일 때 $A(0)=0$이고, $\theta=\pi$일 때 $A(\pi)=\frac{\pi}{2}$이다. 따라서 닫힌구간 $[0,\pi]$에서 $A(\theta)=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{2}$이다. 그러므로

$$\int_0^\pi A(\theta)\ d\theta=\int_0^\pi \frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)\ d\theta = \left[\frac{\theta^2}{4}+\frac{\cos\theta}{2}\right]_0^\pi=\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{4}-1$$

이다.

(3) 선분 PQ의 중점을 점 R이라 하면 각 ROQ의 크기는 $\frac{\theta}{2}$이고 삼각형 ROQ의 빗변의 길이가 1이므로 $\overline{\mathrm{RQ}}=\sin\frac{\theta}{2}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sin\frac{\theta}{2}$ 이고 $B(\theta)=\theta+2\sin\frac{\theta}{2}$이며

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{B(\theta)}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta+\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{\sin\theta}+\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=1+1=2$$

이다.

(별해) 반지름이 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이는 θ이므로 $B(\theta)=\theta+\overline{\mathrm{PQ}}$이다. 한편 $0<\theta<\pi$일 때, 삼각형 OPQ에 코사인법칙을 적용하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2-2\cos\theta}$이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{B(\theta)}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta+\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{\sin\theta}+\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\theta}$$

이다. $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sin\theta\sqrt{1+\cos\theta}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos\theta}}=1$이므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{B(\theta)}{\sin\theta}=2$이다.

[문항 2]

[문제 2-1]

(1) $f(3)=3$이므로 $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(3)=3$이다. f가 2-상수함수이므로 모든 $n\in X$에 대하여 $(f\circ f)(n)=3$이다. 따라서 모든 $n\in X$에 대하여 $a_n=(f\circ f\circ f)(n)=f((f\circ f)(n))=f(3)=3$이다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{2024}a_n=3\times2024=6072$이다.

(2) 자연수 m,n에 대하여 $m>n$이면 $f(m)\geq f(n)$이다. 그러므로 함수 $f(n)$은 $n=1$에서 최솟값을 갖는다. 같은 방법으로 합성함수 $(f\circ f)(n)$은 $n=1$에서 최솟값을 갖고, $(f\circ f\circ f)(n)$은 $n=1$에서 최솟값을 갖는다. 함수 f는 상수함수가 아니어야 하므로 $f(1)=4$이다. f는 2-상수함수가 아니므로 $k>4$이고 $(f\circ f)(1)=7$이다. 함수 f는 3-상수함수이므로 $k\leq7$이어야 한다. 그러므로 가능한 k의 값은 5, 6, 7이다.

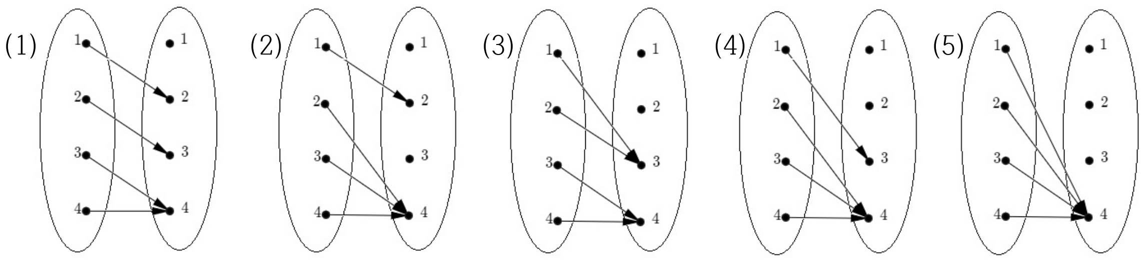
[문제 2-2]

함수 $f : X \to X$ 는 4-상수함수이고 $(f \circ f \circ f \circ f)(1) = 4$이므로 <조건>의 ①에 의하여 $f(4) = 4$이다. 만약 $f(x) = x$를 만족하는 $x \in \{1,2,3\}$가 존재하면 $f \circ f \circ f \circ f$의 치역에는 x와 4가 모두 포함되어 상수함수가 아니다.

$x = 1,2,3$일 때 $f(x) \neq x$ 이며, <조건>의 ②에 의하여 $x = 1,2,3$일 때 $x < f(x)$ 이다. 즉, $f(3) = 4$가 된다. 따라서, $f(1)$과 $f(2)$로 가능한 값은 다음과 같다.

- $f(1) = 2$이면 $f(2)$는 3 또는 4이다.
- $f(1) = 3$이면 $f(2)$는 3 또는 4이다.
- $f(1) = 4$이면 $f(2) = 4$이다.

이를 종합하면, 주어진 조건을 만족하는 함수는 아래와 같이 모두 다섯 경우가 있다.



(1)은 3-상수함수이고 (2)~(4)는 2-상수함수이며 (5)는 1-상수함수이다. 따라서 이들은 모두 4-상수함수이다.

[문제 2-3]

어떤 함수가 일대일대응이면 그 함수를 여러 번 합성한 함수도 일대일대응이므로 상수함수가 될 수 없다. 따라서 일대일대응이 아닌 함수만 살펴보아도 충분하다. 일대일대응인 경우는 치역의 원소의 개수가 3이므로 치역의 원소의 개수가 1과 2인 경우를 확인해보자.

(i) 치역의 원소의 개수가 1인 경우는 1-상수함수이므로 이러한 함수 g에 대하여 주어진 명제는 참이며, 이러한 함수의 개수는 3이다.

(ii) 치역의 원소의 개수가 2인 경우 치역을 $\{a, b\}$라 하고 치역에 속하지 않는 X의 원소를 c라 하자.

- 함수 g에 대하여 $g(a) \neq g(b)$라 하자. $g(a) = a$, $g(b) = b$ 또는 $g(a) = b$, $g(b) = a$이면 함수 g는 여러 번 합성해도 함숫값으로 a와 b를 가지므로 이러한 함수 g에 대하여 주어진 명제는 참이 아니다.
- 함수 g에 대하여 $g(a) = g(b)$라 하자. 치역이 $\{a, b\}$이므로, $g(a) = g(b) = a$, $g(c) = b$ 이거나 $g(a) = b$, $g(b) = b$, $g(c) = a$이다. 두 함수 모두 2-상수함수로 이 함수들에 대하여 주어진 명제는 참이다.

치역의 원소의 개수가 2인 경우는 3가지이므로 이러한 함수의 개수는 6이다.

따라서, 총 $3 + 6 = 9$개의 함수가 주어진 명제를 참이 되도록 한다.

2024학년도 논술고사

자연계열(오전)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 2

2024학년도 자연계열(오전) 채점기준

자연계열 (오전)

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프를 관찰하여 최댓값을 올바르게 구함	4점
	두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프를 관찰하여 최솟값을 올바르게 구함	4점
[1-1] (2)	x좌표가 α일 때 두 곡선의 교점임을 관찰	4점
	$\sin\alpha$ 또는 $\cos\alpha$의 값을 올바르게 구함	4점
	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$임을 관찰하여 답을 올바르게 구함	4점

하위 문항	채점 기준	배점
[1-2] (1)	삼각형 OPQ의 넓이 또는 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 올바르게 구함	4점
	삼각함수의 정의를 이해하여 답을 올바르게 구함 4점	4점
[1-2] (2)	부채꼴 또는 삼각형의 넓이를 이용하여 $A(\theta)$를 올바르게 구함	6점
	정적분을 계산하여 답을 올바르게 구함	4점
[1-2] (3)	선분 PQ 또는 호 PQ의 길이 구함	4점
	$B(\theta)$를 구하고 구하고자 하는 극한을 올바르게 표현함	4점
	삼각함수의 극한을 이해하여 답을 올바르게 구함	4점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	모든 n에 대하여 $(f \circ f)(n) = 3$임을 관찰	3점
	모든 n에 대하여 $a_n = 3$임을 관찰	3점
	합의 기호를 이해하고 답을 올바르게 구함	2점
[2-1] (2)	자연수 m, n에 대하여 $m > n$이면 $f(m) \geq f(n)$임을 관찰	4점
	$k > 4$임을 관찰	4점
	$k \leq 7$임을 관찰하고 답을 올바르게 구함	4점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-2]	조건을 잘 이해하고 $f(3)$과 $f(4)$에 대하여 의미있는 관찰	4점
	조건을 잘 이해하고 $f(1)$과 $f(2)$에 대하여 의미있는 관찰	8점
	조건을 만족하는 답을 올바르게 구함	3점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-3]	명제가 거짓이 되도록 하는 $g(x)$의 성질에 대한 의미있는 관찰	5점
	명제가 참이 되도록 하는 $g(x)$의 성질에 대한 의미있는 관찰	5점
	$g(x)$의 성질을 이해하여 답을 올바르게 구함	5점