

2023학년도 논술고사

자연계열(오후)



성명	
전형	
수험번호	

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 함수 $f(x)$ 가 미분가능한 함수이고 $f(0)=f(1)=0$ 을 만족하면 **좋은함수**라 하자. 특히 좋은함수 $f(x)$ 가 $f'(0)=a$, $f'(1)=b$ 이면 $f(x)$ 를 $\ll a, b \gg$ -**좋은함수**라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 좋은함수 라면 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $(f \circ g)(x)$ 도 좋은함수이다.

한편 $f(x)$ 가 좋은함수이면 평균값 정리에 의하여 양의 실수 p 에 대하여

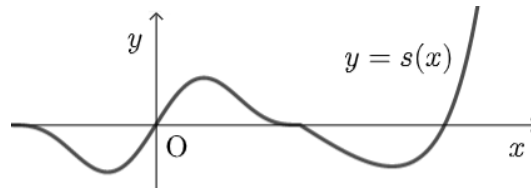
$$\frac{f(p)-f(0)}{p-0} = \frac{f(p)}{p} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, p)$ 에 존재한다.

(나) 함수 $g(x) = \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $h(x) = xe^{x^2-1} - x$ 에 대하여 함수 $s(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$s(x) = \begin{cases} g(x) & (x \leq 1) \\ h(x-1) & (x > 1) \end{cases}$$

이때 $s(x)$ 는 연속함수이고 $s(0)=s(1)=0$ 이지만 $g'(1) \neq h'(0)$ 이므로 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. 따라서 $s(x)$ 는 좋은함수가 아니다.





2023학년도 자연계열(오후) 논술고사

자연계열
[오후]

[문제 1-1] (25점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) $\ll 0, 0 \gg$ -좋은함수인 사차함수 $f(x)$ 의 극댓값이 2^{10} 이고 $A = \log 2$, $B = \log 3$ 일 때, $\log f(6)$ 의 값을 A 와 B 로 나타내라.

(2) 좋은함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 연속인 이계도함수 $f''(x)$ 를 갖고, $0 < p < 1$ 인 실수 p 에 대하여 $f(x)$ 가 $x = p$ 에서 최댓값 2023을 가진다. 이때 $\int_a^b f''(x) dx = \frac{2023}{p(p-1)}$ 을 만족하는 두 실수 a, b 가 열린 구간 $(0, 1)$ 에 존재함을 증명하라.

[문제 1-2] (25점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 제시문 (나)의 함수 $s(x)$ 에 대하여 $\int_0^2 s(x) dx$ 의 값을 구하라.

(2) 9 이하의 자연수 a, b, c, d, e, f 에 대하여 $p(x)$ 는 $\ll a, b \gg$ -좋은함수, $q(x)$ 는 $\ll c, d \gg$ -좋은함수, $r(x)$ 는 $\ll e, f \gg$ -좋은함수이다. 두 함수 $G(x) = p(q(x)) + p(x)q(x)$ 와 $H(x) = q(r(x)) + 2r(x)$ 에 대하여 함수 $S(x)$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$S(x) = \begin{cases} G(x) & (x \leq 1) \\ H(x-1) & (x > 1) \end{cases}$$

$S(x)$ 가 $\ll n, 24 \gg$ -좋은함수이고 자연수 n 이 24의 약수가 되는 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수를 구하라.



[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 닫힌구간에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하거나 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수를 구할 때, 극값이나 양 끝 값 등 특정 함숫값을 비교하는 것으로 충분할 수 있다. 가령 삼차함수 $f(x)=x^3-3ax+b$ 에 대하여 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 구하는 문제를 생각해 보자. $0 < a < 4$ 인 경우 $f(x)$ 는 $x=\pm\sqrt{a}$ 에서 극값을 가지므로 $|f(-2)|$, $|f(-\sqrt{a})|$, $|f(\sqrt{a})|$, $|f(2)|$ 를 비교해서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 구할 수 있고, 그렇지 않으면 $|f(-2)|$ 와 $|f(2)|$ 를 비교해서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 구할 수 있다.

(나) 실수 a, b 에 대하여 함수 $F(x)=x^4+ax^2+b$ 에서 $t=x^2$ 으로 치환하여 얻은 이차함수 $f(t)=t^2+at+b$ 를 생각하자. 실수 α 에 대하여 $F(\alpha)=0$ 이면 $f(\alpha^2)=0$ 을 만족한다. 따라서 방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가지는 것은 방정식 $F(x)=0$ 이 서로 다른 네 실근을 가지기 위한 필요충분조건이다.



2023학년도 자연계열(오후) 논술고사

자연계열
[오후]

[문제 2-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 함수 $f(x) = x^3 - 3ax + a$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하라.

(2) 함수 $f(x) = x^3 - 3ax + 2$ 에 대하여 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값이 가장 작아지도록 하는 실수 a 의 값과 그때의 $|f(x)|$ 의 최댓값을 구하라.

[문제 2-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 함수 $F(x) = x^4 + ax^2 + b$ 에 대하여 방정식 $F(x) = 0$ 은 서로 다른 네 실근을 가지고 모든 실근의 절댓값이 양수 A 보다 크다고 하자. 방정식 $F'(x) = 0$ 의 0이 아닌 실근의 절댓값이 A 보다 크다는 것을 증명하라. (단, a, b 는 상수)

(2) 함수 $F(x) = x^4 - x^2 + c$ 에 대하여, 방정식 $F(x) = 0$ 이 서로 다른 네 실근 p, q, r, s ($p < q < r < s$)를 가지고 $\int_p^s F(x) dx = 0$ 을 만족할 때, 상수 c 를 구하라.

(3) 함수 $G(x) = x^4 - 4x^3 + 9x - \frac{11}{2}$ 에 대하여, 다음 <조건>을 만족하는 일차함수 $L(x)$ 를 구하라.

< 조 건 >

① $F(x) = x^4 + ax^2 + b$ (단, a, b 는 상수)

② $G(x) = F(x - m) + L(x)$ (단, m 은 상수)

③ 방정식 $G(x) - L(x) = 0$ 이 서로 다른 네 실근을 가지고, 가장 큰 실근 t 에 대하여

$$\int_m^t (G(x) - L(x)) dx = 0$$

2023학년도 논술고사

자연계열(오후) 모범답안



[문제 1-1]

(1) $f(x) = ax^2(x-1)^2$ (단, a 는 0이 아닌 실수)라 둘 수 있다. 따라서 $x = \frac{1}{2}$ 에서 $f(x)$ 가 극댓값을 가지고 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2^4} = 2^{10}$ 이므로 $a = 2^{14}$ 이다. 따라서 $f(x) = 2^{14}x^2(x-1)^2$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\log f(6) = \log(2^{16}3^25^2) = 2 + 14A + 2B$$

(2) 닫힌구간 $[0, p]$ 에서 평균값 정리에 의하면, $f'(a) = \frac{f(p) - f(0)}{p - 0} = \frac{2023}{p}$ 인 a 가 열린구간 $(0, p)$ 에 존재한다. 닫힌구간 $[p, 1]$ 에서 평균값 정리에 의하면, $f'(b) = \frac{f(1) - f(p)}{1 - p} = \frac{2023}{p - 1}$ 인 b 가 열린구간 $(p, 1)$ 에 존재한다. 이때, $\int_a^b f''(x) dx = f'(b) - f'(a)$ 이므로 $\int_a^b f''(x) dx = \frac{2023}{p - 1} - \frac{2023}{p} = \frac{2023}{p(p - 1)}$ 인 두 실수 a, b 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재한다.

[문제 1-2]

(1) 치환적분을 이용하면 아래가 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_0^2 s(x) dx &= \int_0^1 g(x) dx + \int_1^2 h(x-1) dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 h(t) dt \quad (t = x - 1 \text{로 치환}) \\ &= \int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx + \int_0^1 (xe^{x^2-1} - x) dx \end{aligned}$$

각 정적분을 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx &= \left[-\frac{1}{2\pi} \cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi} \\ \int_0^1 (xe^{x^2-1} - x) dx &= \left[\frac{1}{2} e^{x^2-1} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2e} \end{aligned}$$

따라서 구하고자 하는 정적분값은 $\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2e}$ 이다.

(2) 합성함수의 미분법과 곱의 미분법에 의해서 $G'(x) = p'(q(x))q'(x) + p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$ 이고 $H'(x) = q'(r(x))r'(x) + 2r'(x)$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} G'(0) &= p'(0)q'(0) + p'(0)q(0) + p(0)q'(0) = ac, \\ G'(1) &= p'(0)q'(1) + p'(1)q(1) + p(1)q'(1) = ad, \\ H'(0) &= q'(0)r'(0) + 2r'(0) = ce + 2e, \\ H'(1) &= q'(0)r'(1) + 2r'(1) = cf + 2f \end{aligned}$$

이므로 $G(x)$ 는 $\ll ac, ad \gg$ -좋은함수이고 $H(x)$ 는 $\ll ce + 2e, cf + 2f \gg$ -좋은함수이다. 따라서 $S(x)$ 가 $\ll n, 24 \gg$ -좋은함수이므로 $ac = n$, $ad = 24 = (c+2)e$ 를 만족해야 한다. a 는 24의 약수이고 a, d 가 모두 9 이하의 자연수이므로 a 로 가능한 수는 3, 4, 6, 8이며 각 a 마다 대응되는 d 가 유일하게 결정된다. 같은 방식으로 $c+2$ 역시 3, 4, 6, 8만 가능하고 마찬가지로 $c+2$ 에 대응되는 e 가 유일하게 결정된다. ac 가 24의 약수가 되어야 하므로 가능한 순서쌍 (a, c) 은 (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 4), (8, 1)로 10가지이다. 한편, b 와 f 는 9이하의 모든 자연수가 가능하므로 구하는 경우의 수는 $10 \times 9 \times 9 = 810$ 이다.



[문제 2-1]

(1) 문제의 조건에 의해, 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

따라서, $f'(x)=3(x^2-a)=0$ 이 $[-2, 2]$ 에서 두 실근을 가지므로 $0 < a < 4$ 이고, $f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) < 0$ 이어야 한다. 이때, $f(-\sqrt{a})=a(1+2\sqrt{a}) > 0$ 이므로 $f(\sqrt{a})=a(1-2\sqrt{a}) < 0$ 이다. 따라서 $a > \frac{1}{4}$ 이다. 또한 $f(-2)=-8+7a \leq 0$ 이므로 $a \leq \frac{8}{7}$ 이다. 따라서 실수 a 의 값의 범위는 $\frac{1}{4} < a \leq \frac{8}{7}$ 이다.

(2) $a=1$ 일 때 $f(-2)=f(\sqrt{a})=0$, $f(-\sqrt{a})=f(2)=4$ 이므로 $|f(x)|$ 의 최댓값은 4이다.

$a < 1$ 이면 $f(2)=10-6a > 4$, $a \geq 4$ 이면 $f(-2)=6a-6 > 4$ 이므로 $|f(x)|$ 의 최댓값은 4보다 크다.

$1 < a < 4$ 이면 $f(-\sqrt{a})=2(a\sqrt{a}+1) > 4$ 이다. 따라서, $a \neq 1$ 일 때 $|f(x)|$ 의 최댓값은 4보다 크다.

따라서 $a=1$ 일 때 $|f(x)|$ 의 최댓값이 가장 작고, 그때의 $|f(x)|$ 의 최댓값은 4이다.

[문제 2-2]

(1) 문제의 조건으로부터, 이차방정식 $f(t)=t^2+at+b=0$ 의 두 실근은 모두 양수이고 A^2 보다 크다. 이때, 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 $-a > 2A^2$ 이다. $F'(x)=2x(x^2+a)$ 이므로 방정식 $F'(x)=0$ 의 실근은 $x=0$ 또는 $\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 이다. 즉, 0이 아닌 실근의 절댓값은 $\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 이고 이 값은 A 보다 크다.

(2) 이차함수 $f(x)=x^2-x+c$ 라 두자. 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로 $s=-p$, $r=-q > 0$ 이다. 따라서, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근은 r^2, s^2 이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $r^2+s^2=1$, $r^2s^2=c$ 를 만족한다. 한편

$$0 = \int_{-s}^s (x^4 - x^2 + c) dx = 2\left(\frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{3}s^3 + cs\right)$$

이므로 $c=s^2(1-s^2)$ 를 대입하여 풀면 $s^2=\frac{5}{6}$ 이므로 $c=\frac{5}{36}$ 이다.

(3) $L(x)=c(x-m)+d$ 라 두면 $G(x)=x^4-4x^3+9x-\frac{11}{2}=(x-m)^4+a(x-m)^2+b+c(x-m)+d$ 이다. 양변의 계수를 비교하면 $m=1$, $a=-6$, $c=1$ 이고 $b+d=\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$G(x)=(x-1)^4-6(x-1)^2+(x-1)+\frac{1}{2}=F(x-1)+L(x)$$

이므로 구하는 $F(x)$ 와 $L(x)$ 는 모든 실수 b 에 대하여

$$F(x)=x^4-6x^2+b, \quad L(x)=(x-1)+\frac{1}{2}-b=x-\frac{1}{2}-b$$

이다. 한편, 방정식 $G(x)-L(x)=0$ 이 서로 다른 네 실근을 가지면 방정식 $F(x)=0$ 도 서로 다른 네 실근을 갖는다. 조건으로부터 방정식 $F(x)=0$ 의 가장 큰 실근은 $t-m=t-1 > 0$ 이다. ③으로부터

$$0 = \int_1^t F(x-1) dx = \int_0^{t-1} F(x) dx = \int_0^{t-1} (x^4-6x^2+b) dx = \frac{(t-1)^5}{5} - 2(t-1)^3 + b(t-1)$$

이고 $0=F(t-1)=(t-1)^4-6(t-1)^2+b$ 이다. 이 두 방정식을 연립하며 풀면 $t=1+\sqrt{5}$ 이고 $b=5$ 이므로 구하는 일차함수는 $L(x)=x-\frac{11}{2}$ 이다.

2023학년도 논술고사

자연계열(오후) 채점기준





2023학년도 자연계열(오후) 채점기준

자연계열
[오후]

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$f(x)$ 가 $ax^2(x-1)^2$ 의 형태를 가지는 것을 확인	3점
	$x = \frac{1}{2}$ 에서 $f(x)$ 가 극댓값을 가지는 것을 확인	2점
	$a = 2^{14}$ 를 계산	2점
	$\log f(6) = 2 + 14A + 2B$ 를 계산	5점
[1-1] (2)	$\int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$ 임을 확인	3점
	$f'(a) = \frac{f(p)}{p} = \frac{2023}{p}$ 인 a 가 $(0, p)$ 에 존재함을 보임	3점
	평균값의 정리를 사용하여 $f'(b) = \frac{f(p)}{p-1} = \frac{2023}{p-1}$ 인 b 가 열린구간 $(p, 1)$ 에 존재함을 보임	4점
	위 세 가지 결과와 $\frac{2023}{p-1} - \frac{2023}{p} = \frac{2023}{(p-1)p}$ 을 이용하여 증명	3점
[1-2] (1)	$\int_0^2 s(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 h(x)dx$ 임을 관찰	4점
	$\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2\pi}$ 임을 계산	4점
	$\int_0^1 h(x)dx = -\frac{1}{2e}$ 임을 계산	4점
[1-2] (2)	$ac = n$ 임을 확인	3점
	$ad = (c+2)e = 24$ 임을 확인	3점
	순서쌍 (a, c) 의 경우가 10가지가 있다는 것을 구함	4점
	b 와 f 가 모든 수가 다 되어서 전체 경우의 수가 $9 \times 9 = 81$ 의 배수임을 관찰	2점
	정확한 경우의 수 810을 계산	1점



2023학년도 자연계열(오후) 채점기준

자연계열
[오후]

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$0 < a < 4$ 임을 구함	2점
	$a > \frac{1}{4}$ 임을 구함	3점
	$a \leq \frac{8}{7}$ 임을 구함	3점
	$\frac{1}{4} < a \leq \frac{8}{7}$ 임을 구함	2점
[2-1] (2)	a 값의 범위에 따라 구간을 나눔	1점
	$ f(-2) , f(-\sqrt{a}) , f(\sqrt{a}) , f(2) $ 정확하게 계산	1점
	$a < 0$ 이거나 $a \geq 4$ 일 때 $ f(x) $ 의 값이 4보다 크다는 것을 확인	2점
	$0 < a < 4$ 이고 $a \neq 1$ 일때 $ f(x) $ 의 값이 4보다 크다는 것을 확인	3점
	$a = 1$ 일 때 $ f(x) $ 의 최댓값이 가장 작음을 관찰	2점
	$a = 1$ 일 때 $ f(x) $ 의 최댓값이 4임을 확인	1점
[2-2] (1)	이차방정식 $f(t) = t^2 + at + b = 0$ 의 두 근이 A^2 보다 크다는 것을 확인	2점
	$-a > 2A^2$ 임을 확인	3점
	$F'(x) = 0$ 의 0이 아닌 실근의 절댓값이 $\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 이고 A 보다 크다는 것을 확인	5점
[2-2] (2)	이차방정식 $f(x) = x^2 - x + c = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 r^2, s^2 임을 확인	2점
	$\int_{-s}^s (x^4 - x^2 + c) dx = 0$ 의 적분을 풀어 식을 얻음	3점
	$s^2 = \frac{5}{6}$ 을 구함	3점
	$c = \frac{5}{36}$ 로 답을 구함	2점
[2-2] (3)	$m = 1$ 을 구함	2점
	$a = -6$ 와 $L(x)$ 의 일차항의 계수가 1임을 구함	1점
	$b = 5$ 혹은 $t = 1 + \sqrt{5}$ 를 구함	5점
	일차함수 $L(x) = x - \frac{11}{2}$ 임을 구함	2점