2022학년도 논술고사

자연계열(오후)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 2

2022학년도 자연계열(오후) 논술고사

자연계열
(오후)

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 짧은 신호(S)와 긴 신호(L)만으로 구성된 전신부호를 **모스부호**라 한다. 모스부호에 들어 있는 신호의 총 개수를 그 모스부호의 **길이**라 한다. 예를 들어, SSL은 길이가 3인 모스부호이고, LSLLS는 길이가 5인 모스부호이다. 길이가 n인 모든 모스부호의 개수가 2^n인 것은 자명하다. 아래 조건 ㈀을 만족하며 길이가 n인 모스부호의 개수를 a_n이라 하자.

㈀ 긴 신호(L)가 2개 이상 연속해서 나타나지 않는다.

조건 ㈀을 만족하는 모스부호 중에서 길이가 1인 것은 S, L이므로 $a_1 = 2$, 길이가 2인 것은 SS, SL, LS이므로 $a_2 = 3$, 길이가 3인 것은 SSS, SSL, SLS, LSS, LSL이므로 $a_3 = 5$이다. 따라서, $a_3 = a_2 + a_1$이다. 일반적으로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

이 성립한다. 그리고 수열 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$이 수렴한다는 것이 알려져 있다.

(나) 위에서 주어진 조건을 바꾸면 모스부호들의 개수가 달라진다. 아래의 조건 ㈁을 만족하며 길이가 n인 모스부호의 개수를 b_n이라 하자.

㈁ 긴 신호(L)가 3개 이상 연속해서 나타나지 않는다.

조건 ㈁을 만족하는 모스부호 중에서 길이가 1인 것은 S, L이므로 $b_1 = 2$, 길이가 2인 것은 SS, SL, LS, LL이므로 $b_2 = 4$이고, 길이가 3인 것은 SSS, SSL, SLS, SLL, LSS, LSL, LLS이므로 $b_3 = 7$이다. 한편, 수열 $\left\{\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$이 수렴한다는 것이 알려져 있다.

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 질문에 답하라.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하라.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \le a_n \le 2^n$$

(2) $A = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$라 하자. A의 값을 구하라.

[문제 1-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 다음 질문에 답하라.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 성립하는 $b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}$의 관계식을 구하라.

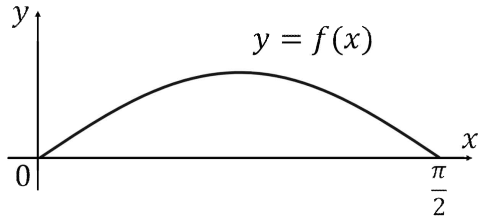
(2) $B = \lim_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 라 하자. 부등식 $\dfrac{3}{2} < B < 2$이 성립함을 증명하라.

2022학년도 자연계열(오후) 논술고사

자연계열 (오후)

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{1}{n+1}\sin(nx)$의 정의역을 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{n}$이라 하자. 예를 들어 $n=2$일 때 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n을 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

(나) 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 위로 볼록한 그래프를 가지는 이차함수를 이용하여 S_n에 대한 어림값을 구할 수 있다. 자연수 n에 대하여 $f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$ (단, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{n}$)를 잡고, 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\pi}{n}, 0\right)$을 지나는 이차함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T_n이라 하면 T_n은 S_n에 대한 어림값이다. 점 P의 위치가 변하면 T_n도 변한다.

(다) 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 공통의 정의역에서 함숫값이 0보다 크고 K는 상수라 하자. 다음 부등식 ㉠이 참이면 부등식 ㉡도 참이다.

$$Kh(x)-g(x) \ge 0 \text{ ---㉠} \qquad\qquad \frac{g(x)}{h(x)} \le K \text{ ---㉡}$$

[문제 2-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) 각 자연수 n에 대하여 제시문 (가)에서 서술한 S_n을 구하라.

(2) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하라.

[문제 2-2] (35점) 제시문을 이용하여 다음 물음에 답하라.

(1) 각 자연수 n에 대하여 제시문 (나)에서 서술한 T_n을 n과 α에 대한 식으로 나타내라.

(2) $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0+} T_n$을 구하라.

(3) $n=1$이라 하자. **(1)**과 제시문 (다)를 이용하여 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$일 때 T_1이 최댓값을 가짐을 증명하라.

(4) **(3)**을 이용하여 각 자연수 n에 대하여 T_n의 최댓값을 구하라.

2022학년도 논술고사

자연계열(오후)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2022학년도 자연계열(오후) 모범답안

자연계열
(오후)

[문제 1-1] (20점)

(1) $a_2 \le 2a_1$이고, $n \ge 3$이면 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \le 2a_{n-1}$이다. 그러므로

$$a_n \le 2a_{n-1}, \quad (n \ge 2) \; .....㉠$$

이 성립한다.

$n=1$일 때, $a_1 = 2$이므로 $\dfrac{3}{2} \le a_1 \le 2$이 성립한다. $n=2$일 때, $a_2 = 3$이므로 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \le a_2 \le 2^2$이 성립한다. $k \ge 2$이라 하자. 주어진 부등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 증명한다. ㉠을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$a_{k+1} \le 2a_k \le 2 \times 2^k = 2^{k+1}$$

한편 ㉠을 이용하면, $3a_k = 2a_k + a_k \le 2a_k + 2a_{k-1} = 2(a_k + a_{k-1}) = 2a_{k+1}$이다. 즉, $a_{k+1} \ge \dfrac{3}{2}a_k$이다. 따라서

$$a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k \ge \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$$

이 성립한다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} \ge a_n$이므로 $A \ge 1$이다. 관계식 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$의 양변을 a_{n+1}로 나누면

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

을 얻는다. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = A$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{A}$이므로 위의 식의 양변에서 n을 무한대로 보내면 $A = 1 + \dfrac{1}{A}$이 된다. 즉 $A^2 - A - 1 = 0$. 그러므로 A는 $x^2 - x - 1 = 0$의 근이다. 이 방정식의 두 근은 $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$인데, $A \ge 1$이므로 $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

[문제 1-2] (30점)

(1) 길이 $(n+3)$이며 조건 ㉡을 만족하는 모스부호의 첫 번째와 두 번째 신호에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(a) 첫 번째 신호가 S인 경우: 2번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+2)$이며 조건 ㉡을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_{n+2}이다.

(b) 첫 번째 신호는 L이고, 두 번째 신호는 S인 경우: 3번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+1)$이며 조건 ㉡을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_{n+1}이다.

(c) 첫 번째 신호와 두 번째 신호가 모두 L인 경우: 3번째 신호는 자동적으로 S이다. 그리고 4번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 n이며 조건 ㉡을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_n이다.

세 가지 경우의 개수를 모두 합하여 관계식

$$b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$$

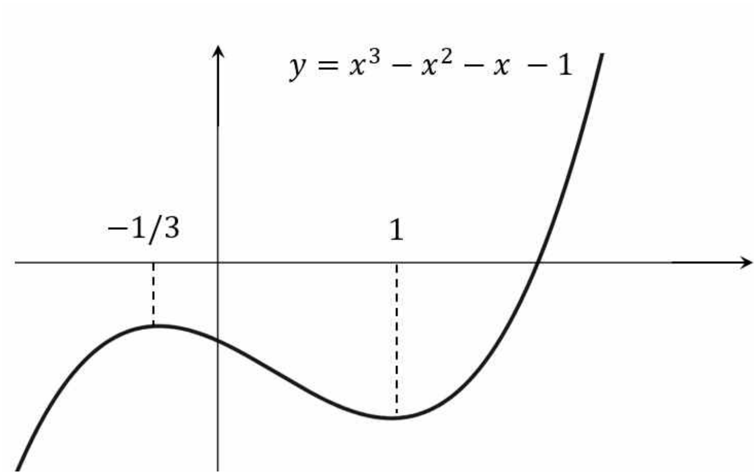
을 얻는다.

(2) 문제 (1)에서 얻은 관계식의 양변을 b_n으로 나누면 $\dfrac{b_{n+3}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_n} + \dfrac{b_{n+1}}{b_n} + 1$이 된다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_{n+2}}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^2$$

이다. 따라서 위의 관계식에서 n을 무한대로 보내어 $B^3 = B^2 + B + 1$을 얻는다. 이제 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$라 놓으면 B는 방정식 $f(x) = 0$의 근이다. $f(x)$의 증감을 조사하면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 한 번 만난다는 사실을 알 수 있다.

x		$-1/3$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	증가	$-22/27$	감소	-2	증가



그런데 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{8} < 0$이고 $f(2) = 1 > 0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $\dfrac{3}{2} < B < 2$이 증명된다.

[문제 2-1] (15점)

(1) 각 자연수 n에 대하여

$$S_n = \int_0^{\pi/n} f(x)dx = \int_0^{\pi/n} \frac{1}{n+1}\sin(nx)dx = \left[-\frac{1}{n(n+1)}\cos(nx)\right]_0^{\pi/n}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)}(-1-1) = \frac{2}{n(n+1)}$$

이 된다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 2.$

[문제 2-2] (35점)

(1) 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\pi/n, 0)$을 지나는 이차함수는 $g(x) = cx\left(x-\frac{\pi}{n}\right)$의 형태로 표현할 수 있고, 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$를 지나야 하므로 $c = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}$가 된다. 즉,

$$g(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}x\left(x-\frac{\pi}{n}\right).$$

따라서, T_n은

$$T_n = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}\int_0^{\pi/n}\left(x^2-\frac{\pi}{n}x\right)dx = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\pi}{n}\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{n}}$$
$$= \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

이다. 이것을 정리하면

$$T_n = \frac{\pi^3}{6n^2(n+1)}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)}$$

(2) $T_n = \frac{\pi^3}{6n(n+1)}\frac{1}{(\pi-n\alpha)}\frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha}$이므로, $\lim_{\alpha\to 0+}\frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha} = 1$을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{\alpha\to 0+} T_n = \frac{\pi^2}{6n(n+1)}$$

(3) (1)에서 구한 $T_1 = \frac{\pi^3}{12}\frac{\sin\alpha}{\alpha(\pi-\alpha)}$가 $\alpha = \frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\frac{\pi}{3}$를 갖는 것을 증명하기 위해서 구간 $0 < x < \pi$에서 정의된 함수 $h(x) = \frac{\sin x}{x(\pi-x)}$가 $x = \frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$을 갖는 것을 증명하면

된다. 그런데 함수 $h(x)$의 그래프는 $x=\frac{\pi}{2}$를 중심으로 대칭이므로 $0<x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $h(x)=\frac{\sin x}{x(\pi-x)} \le \frac{4}{\pi^2}$이 성립함을 보이면 된다. $k(x)=\frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)-\sin x$라 놓으면, 제시문 (다)에 의하여 $0<x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $k(x) \ge 0$을 보이면 된다.

$k(x)$와 $k'(x)=\frac{4}{\pi^2}(\pi-2x)-\cos x$ 그리고 $k''(x)=-\frac{8}{\pi^2}+\sin x$에 대한 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

① $\lim_{x\to 0+} k(x)=0,\ k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

② $\lim_{x\to 0+} k'(x)=\frac{4}{\pi}-1>0,\ k'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

③ $k''(x)=0$을 만족하는 x는 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에 오직 한 개 존재한다.

이제 $k(x)<0$이 되는 x가 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다고 가정하자. 그러면 함수 $k(x)$는 0부터 $\frac{\pi}{2}$ 사이에서 차례로 증가, 감소, 증가하는 구간을 가지므로 $k'(x)=0$을 만족하는 x가 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재한다. $k'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 롤의 정리에 의해 $k''(x)=0$을 만족하는 x가 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재하고, 이것은 ③에 모순이다. 그러므로 $k(x)\ge 0$이 성립한다.

(4) $T_n=\frac{\pi^3}{6n^2(n+1)}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)}$의 최댓값을 구하기 위해 $\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)}$의 최대값을 구간 $\left(0,\frac{\pi}{n}\right)$에서 구하면 된다. $n\alpha=y$로 놓으면 $0<y<\pi$이고, $\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)}=\frac{n\sin y}{y(\pi-y)}$이다. (3)의 결과에 의하여 이것은 $y=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\alpha=\frac{\pi}{2n}$일 때 최대가 된다. 그러므로 T_n의 최댓값은 $\frac{2\pi}{3n(n+1)}$이다.

2022학년도 논술고사

자연계열(오후)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2022학년도 자연계열(오후) 채점기준

자연계열 (오후)

[문제 1-1] (20점)

(1) $a_2 \le 2a_1$이고, $n \ge 3$이면 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \le 2a_{n-1}$이다. 그러므로

$$a_n \le 2a_{n-1}, \quad (n \ge 2) \ \ldots\ldots ㉠$$

이 성립한다.

$n=1$일 때, $a_1 = 2$이므로 $\frac{3}{2} \le a_1 \le 2$이 성립한다. 1점

$n=2$일 때, $a_2 = 3$이므로 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \le a_2 \le 2^2$이 성립한다. 2점

$k \ge 2$이라 하자. 주어진 부등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 증명한다. ㉠을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$a_{k+1} \le 2a_k \le 2 \times 2^k = 2^{k+1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3점$$

한편 ㉠을 이용하면, $3a_k = 2a_k + a_k \le 2a_k + 2a_{k-1} = 2(a_k + a_{k-1}) = 2a_{k+1}$이다. 즉, $a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k$이다. 따라서

$$a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k \ge \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$$

이 성립한다. 4점

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} \ge a_n$이므로 $A \ge 1$이다. 관계식 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$의 양변을 a_{n+1}로 나누면

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

을 얻는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = A$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{A}$이므로 위의 식의 양변에서 n을 무한대로 보내면 $A = 1 + \frac{1}{A}$이 된다. 즉 $A^2 - A - 1 = 0$. 그러므로 A는 $x^2 - x - 1 = 0$의 근이다. 7점

이 방정식의 두 근은 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$인데, $A \ge 1$이므로 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 3점

[문제 1-2] (30점)

(1) 길이 $(n+3)$이며 조건 ㉡을 만족하는 모스부호의 첫 번째와 두 번째 신호에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(a) 첫 번째 신호가 S인 경우: 2번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+2)$이며 조건 ㉡을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_{n+2}이다. 3점

(b) 첫 번째 신호는 L이고, 두 번째 신호는 S인 경우: 3번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+1)$이며 조건 ㉡을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_{n+1}이다. 3점

(c) 첫 번째 신호와 두 번째 신호가 모두 L인 경우: 3번째 신호는 자동적으로 S이다. 그리고 4번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 n이며 조건 ㉡을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_n이다. 3점

세 가지 경우의 개수를 모두 합하여 관계식

$$b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$$

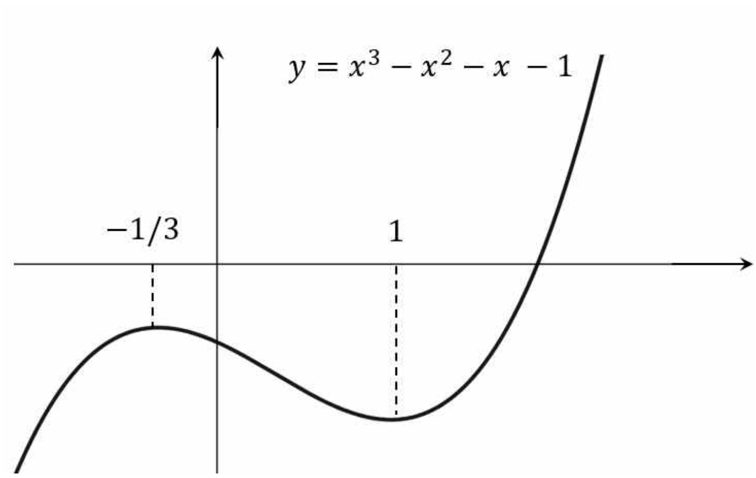
을 얻는다. 6점

(2) 문제 (1)에서 얻은 관계식의 양변을 b_n으로 나누면 $\dfrac{b_{n+3}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_n} + \dfrac{b_{n+1}}{b_n} + 1$이 된다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_{n+2}}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^2$$

이다. 따라서 위의 관계식에서 n을 무한대로 보내어 $B^3 = B^2 + B + 1$을 얻는다. 이제 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$라 놓으면 B는 방정식 $f(x) = 0$의 근이다. 5점
$f(x)$의 증감을 조사하면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 한 번 만난다는 사실을 알 수 있다. 5점

x		$-1/3$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	증가	$-22/27$	감소	-2	증가



그런데 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{8} < 0$이고 $f(2) = 1 > 0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $\dfrac{3}{2} < B < 2$이 증명된다.
....5점

[문제 2-1] (15점)

(1) 각 자연수 n에 대하여

$$S_n = \int_0^{\pi/n} f(x)dx \text{ ....3점}$$

계산하면

$$S_n = \int_0^{\pi/n} f(x)dx = \int_0^{\pi/n} \frac{1}{n+1}\sin(nx)dx = \left[-\frac{1}{n(n+1)}\cos(nx)\right]_0^{\pi/n} \text{ ....7점}$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}(-1-1) = \frac{2}{n(n+1)}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 2.$ 5점

[문제 2-2] (35점)

(1) 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\pi/n, 0)$을 지나는 이차함수는 $g(x) = cx\left(x-\frac{\pi}{n}\right)$의 형태로 표현할 수 있고, 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$를 지나야 하므로 $c = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}$가 된다. 즉,

$$g(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}x\left(x-\frac{\pi}{n}\right). \text{ ....5점}$$

따라서, T_n은

$$T_n = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}\int_0^{\pi/n}\left(x^2-\frac{\pi}{n}x\right)dx = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\pi}{n}\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

이다. 이것을 정리하면

$$T_n = \frac{\pi^3}{6n^2(n+1)}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)} \text{ ....5점}$$

(2) $T_n = \frac{\pi^3}{6n(n+1)}\frac{1}{(\pi-n\alpha)}\frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha}$이므로, $\lim_{\alpha\to 0+}\frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha} = 1$을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{\alpha\to 0+} T_n = \frac{\pi^2}{6n(n+1)} \text{ ....5점}$$

(3) (1)에서 구한 $T_1 = \dfrac{\pi^3}{12}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha(\pi-\alpha)}$가 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{\pi}{3}$를 갖는 것을 증명하기 위해서 구간 $0<x<\pi$에서 정의된 함수 $h(x)=\dfrac{\sin x}{x(\pi-x)}$가 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 최댓값 $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi^2}$을 갖는 것을 증명하면 된다. 그런데 함수 $h(x)$의 그래프는 $x=\dfrac{\pi}{2}$를 중심으로 대칭이므로 $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$일 때 $h(x)=\dfrac{\sin x}{x(\pi-x)} \le \dfrac{4}{\pi^2}$이 성립함을 보이면 된다. $k(x)=\dfrac{4}{\pi^2}x(\pi-x)-\sin x$라 놓으면, 제시문 (다)에 의하여 $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$일 때 $k(x) \ge 0$을 보이면 된다. 5점

$k(x)$와 $k'(x) = \dfrac{4}{\pi^2}(\pi-2x)-\cos x$ 그리고 $k''(x) = -\dfrac{8}{\pi^2}+\sin x$에 대한 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

① $\lim\limits_{x\to0+} k(x) = 0$, $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

② $\lim\limits_{x\to0+} k'(x) = \dfrac{4}{\pi}-1>0$, $k'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. 5점

③ $k''(x)=0$을 만족하는 x는 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에 오직 한 개 존재한다.

이제 $k(x)<0$이 되는 x가 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다고 가정하자. 그러면 함수 $k(x)$는 0부터 $\dfrac{\pi}{2}$ 사이에서 차례로 증가, 감소, 증가하는 구간을 가지므로 $k'(x)=0$을 만족하는 x가 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재한다. $k'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$이므로 롤의 정리에 의해 $k''(x)=0$을 만족하는 x가 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재하고, 이것은 ③에 모순이다. 그러므로 $k(x) \ge 0$이 성립한다. ...5점

(4) $T_n = \dfrac{\pi^3}{6n^2(n+1)}\dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)}$의 최댓값을 구하기 위해 $\dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)}$의 최대값을 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{n}\right)$에서 구하면 된다. $n\alpha=y$로 놓으면 $0<y<\pi$이고, $\dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi-n\alpha)} = \dfrac{n\sin y}{y(\pi-y)}$이다. (3)의 결과에 의하여 이것은 $y=\dfrac{\pi}{2}$, 즉 $\alpha=\dfrac{\pi}{2n}$일 때 최대가 된다. 그러므로 T_n의 최댓값은 $\dfrac{2\pi}{3n(n+1)}$이다. 5점