2022학년도 논술고사

자연계열(오전)

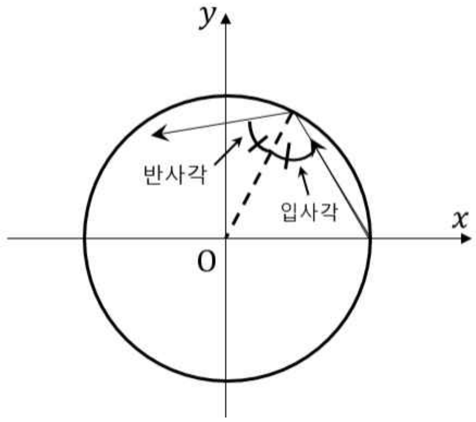
성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

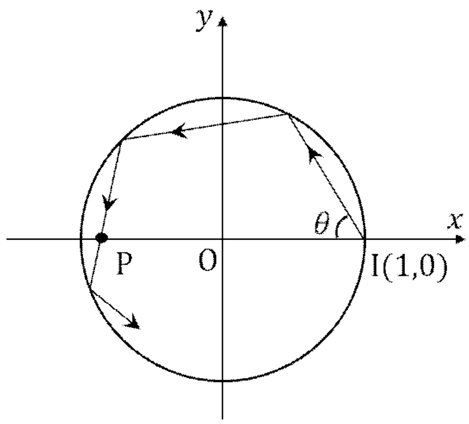
[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

직진하던 빛이 물체에 부딪칠 때 진행 방향이 바뀌어 나아가는 현상을 **빛의 반사**라고 한다. 빛이 원에서 반사될 때, [그림 1-1]에서와 같이 입사각과 반사각의 크기가 같다.

중심이 원점 O이고 반지름이 1인 원 $x^2+y^2=1$을 단위원이라 한다. 점 $\mathrm{I}(1,0)$에서 빛이 x축과 각 θ (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)를 이루며 단위원 내부로 발사되고 계속해서 원에서 반사된다고 하자. 이때, 각 θ를 **발사각**이라 한다. 반사가 일어나는 원 위의 점을 **반사지점**이라 하고, n번째 반사가 일어나는 반사지점을 ***n*번째 반사지점**이라 한다. [그림 1-2]는 점 $\mathrm{I}(1,0)$에서 발사된 빛이 원 위에 2번 반사된 후, x축 위의 점 P를 통과하는 예를 보여준다. 모든 각의 단위는 라디안(radian)이다.



[그림 1-1]



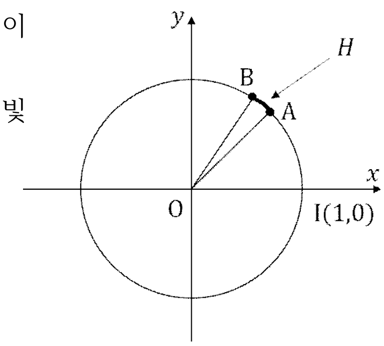
[그림 1-2]

[문제 1-1] (25점) [그림 1-2]와 같이 단위원 위의 점 I에서 빛이 발사각 θ를 이루며 발사되어 제2사분면에서 원 위의 2번째 반사지점을 지나 제3사분면에서 원 위의 3번째 반사지점을 갖게 된다고 하자.

(1) 발사각 θ의 범위를 구하고, 빛이 통과하는 x축 위의 점 P의 x좌표를 θ를 이용하여 나타내라.

(2) $\theta = \dfrac{7\pi}{24}$이고 $a = \cos\dfrac{\pi}{24}$라 할 때, 2번째 반사지점에서 점 P까지 빛이 이동한 거리를 a에 대한 식으로 나타내라.

[문제 1-2] (15점) [그림 1-3]에서 $\angle \mathrm{IOA} = \dfrac{18\pi}{64}$ 이고 $\angle \mathrm{IOB} = \dfrac{21\pi}{64}$이다. 호 AB를 H라 하자. 발사각이 $\theta = \dfrac{59\pi}{128}$일 때, 점 I에서 발사된 빛이 n번째 반사지점에서 H와 2번째로 만난다고 하자. n을 구하라.

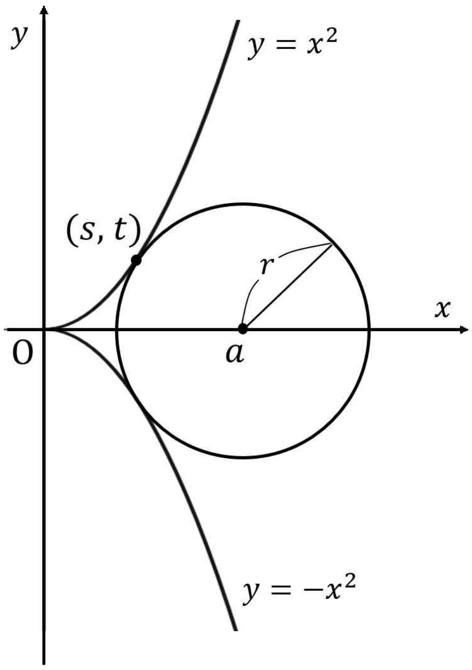


[그림 1-3]

[문제 1-3] (10점) 점 I에서 빛이 발사각 $\theta = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$로 발사되었을 때, 점 I가 반사지점이 될 수 없음을 $\sqrt{6}$이 무리수라는 사실을 이용하여 증명하라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

양수 a에 대해, 중심이 점 $(a,0)$인 원이 아래 그림과 같이 $x \geq 0$에서 정의된 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2$과 각각 한 점에서만 만난다. 이때 원의 반지름을 r이라고 하고 원과 곡선 $y=x^2$이 만나는 점을 (s,t)라고 하자.



점 $(a,0)$이 x축을 따라 원점으로 다가갈수록 원의 반지름 r은 작아지고, s와 t도 작아진다. 즉, 세 양수 r, s, t는 a에 의존하여 변한다. 특히, 점 (s,t)는 다음의 식을 만족함이 알려져 있다.

$$t=\frac{a-s}{2s} \qquad \text{또는} \qquad 2st+s-a=0 \quad \text{---} \ ㉠$$

식 ㉠과 $t=s^2$를 이용하면

$$2s^3+s=a$$

를 얻는다. s는 양수이므로 $0<s<a$이어야 한다. 그러므로 $\lim_{a\to 0+} s=0$이 된다.

[문제 2-1] (10점) 원의 중심 $(a,0)$과 점 (s,t)를 잇는 선분을 ℓ_1이라 하고 ℓ_1과 x축이 이루는 예각을 θ (라디안)이라고 하자. a가 0에 한없이 가까워질 때, θ가 $\frac{\pi}{2}$에 한없이 가까워짐을 보여라.

[문제 2-2] (20점) $n=0,1,2,\cdots$에 대하여 다음의 물음에 답하라.

(1) $\frac{a^n}{r}$을 a, r, t를 포함하지 않는 s만의 식으로 나타내라.

(2) $\lim_{a\to 0+}\frac{a^n}{r}$이 정수가 되는 n을 모두 구하라.

[문제 2-3] (20점) 제시문과 **[문제 2-1]**을 참고하여 다음의 물음에 답하라.

(1) x축에 대하여 선분 ℓ_1과 대칭인 선분을 ℓ_2라 하자. $x\ge 0$에서 정의된 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2$과 두 선분 ℓ_1, ℓ_2로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하자. S를 a, r, t를 포함하지 않는 s만의 식으로 나타내라.

(2) (1)에서 서술한 영역 중 원 내부에 포함된 부분의 넓이를 T라 할 때, $\lim_{a\to 0+}\frac{T}{S}$을 구하라.

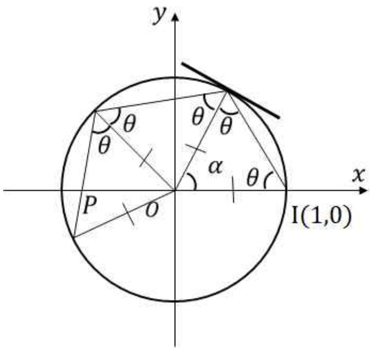
2022학년도 논술고사

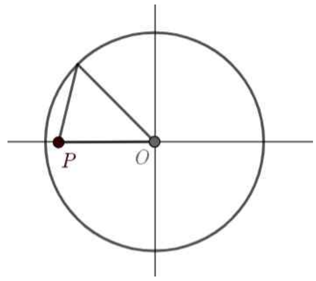
자연계열(오전)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 :4

[문제 1-1] (25점)

(1)





빛의 입사각과 반사각이 같으므로 첫 번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선(x축의 양의 방향 반직선)이 이루는 각을 α라고 두면, $\alpha=\pi-2\theta$이고 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $0<\alpha<\pi$이다. 또한 2번째, 3번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각은 각각 $2\alpha, 3\alpha$가 된다. 문제의 가정에 의해 $2\alpha<\pi<3\alpha$이므로 $\alpha=\pi-2\theta$로 부터 부등식 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$을 얻는다. 이때, 점 $\mathrm{P}(x,0)$에 대하여 선분 OP의 길이는 $-x$이므로, 두 번째 반사지점과 점 P, 원점 O를 꼭지점으로 하는 삼각형과 사인법칙에 의해,

$$\frac{-x}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(2\pi-5\theta)}$$

이다. 따라서, $\sin(2\pi-5\theta)=-\sin 5\theta$에 의해서 $x=\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$이다.

(2) $\theta=\dfrac{7\pi}{24}$이므로 덧셈정리를 이용하여

$$\sin\theta=\sin\frac{7\pi}{24}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{3}-\sqrt{1-a^2}\right\}$$

을 얻고

$$\sin 5\theta=\sin\frac{35\pi}{24}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{24}=-a$$

이므로, 점 P의 x좌표는 $\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{2a}$이다. 한편 $2\alpha=2\pi-4\theta=\dfrac{5\pi}{6}$이므로 2번째 반사지점의 좌표는 $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이다. 따라서, 2번째 반사지점에서 점 P까지 빛의 이동거리는

$$\sqrt{(x-\cos 2\alpha)^2+(\sin 2\alpha)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2a}$$

이다.

[문제 1-2] (15점)

첫 번째 반사지점을 지나는 동경이 시초선과 이루는 각은 $\alpha=\pi-2\theta=\frac{5\pi}{64}$이다. 두 번째 이상의 각 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 직전 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각에 $\alpha=\frac{5\pi}{64}$을 더한 것이므로, n번째 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 $n\alpha=\frac{5n\pi}{64}$가 된다. 따라서 문제에서 주어진 호 H에 n번째 반사지점이 있다는 것은 어떤 $p=0,1,2,\cdots$에 대하여

$$2p\pi+\frac{18\pi}{64}\le\frac{5n\pi}{64}\le 2p\pi+\frac{21\pi}{64}$$

를 만족한다는 의미가 된다. 빛이 2번째로 호 H와 만나게 되는 순간의 n을 p의 값을 키워가며 찾아간다.

• $p=0$일 때, $\frac{18\pi}{64}\le\frac{5n\pi}{64}\le\frac{21\pi}{64}$를 정리하면 $18\le 5n\le 21$, 즉 $n=4$이다. 따라서 빛은 4번째 반사지점에서 처음 호 H와 만난다.

• $p=1$일 때, $2\pi+\frac{18\pi}{64}\le\frac{5n\pi}{64}\le 2\pi+\frac{21\pi}{64}$를 정리하면 $146\le 5n\le 149$인데, 이 부등식을 만족하는 자연수 n은 없다.

• $p=2$일 때, $4\pi+\frac{18\pi}{64}\le\frac{5n\pi}{64}\le 4\pi+\frac{21\pi}{64}$를 정리하면 $274\le 5n\le 277$이고, $n=55$이다. 따라서, 빛이 2번째로 호 H와 만나는 반사지점은 55번째 반사지점이다.

[문제 1-3] (10점) 점 $\mathrm{I}(1,0)$이 발사된 빛의 반사지점 중 하나가 된다고 가정하자. 그러면 적당한 자연수 n과 p에 대해

$$n\left(\pi-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right)=2p\pi \text{ 또는 } \sqrt{6}=\frac{n}{n-2p}$$

을 만족해야 한다. 하지만, 두 번째 식의 우변이 유리수이므로 $\sqrt{6}$이 무리수라는 사실에 모순이다. 따라서 귀류법에 의하여, 위 식을 만족하는 n과 p를 찾을 수 없고, 점 $\mathrm{I}(1,0)$은 발사각이 $\theta=\frac{\pi}{\sqrt{6}}$인 빛의 반사지점 중 하나가 될 수 없다.

[문제 2-1] (10점)

식 ㉠을 이용하면

$$\sin\theta = \frac{t}{r} = \frac{t}{\sqrt{(a-s)^2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{(2st)^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{4s^2+1}}$$

이고 $\lim_{a\to 0+}\sin\theta = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{\sqrt{4s^2+1}} = 1$이 된다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $1=\sin\frac{\pi}{2}$이므로 사인함수의 연속성에 의하여 $\lim_{a\to 0+}\theta = \frac{\pi}{2}$이다.

[문제 2-2] (20점)

(1) 점 (s,t)와 점 $(a,0)$사이의 거리가 원의 반지름 r이다. 이와 함께 식 ㉠과 점 (s,t)가 포물선 위에 있다는 것을 이용하면 식

$$r = t\sqrt{4s^2+1} = s^2\sqrt{4s^2+1}$$

을 얻는다. 위 식과 식 $2s^3+s=a$를 이용하면

$$\frac{a^n}{r} = \frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}}$$

의 식을 얻게 된다.

(2) n에 따라 다음의 극한을 관찰할 수 있다.

$n=0;\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a^0}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \infty.$

$n=1;\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{2s^3+s}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to 0+}\frac{2s^2+1}{s\sqrt{4s^2+1}} = \infty.$

$n=2;\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a^2}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^2}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^2}{\sqrt{4s^2+1}} = 1.$

$n\ge 3;\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a^n}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^n s^{n-2}}{\sqrt{4s^2+1}} = 0.$

따라서 문제에서 구하는 답은 2이상의 정수가 된다.

[문제 2-3] (20점)

(1) 관찰을 통해 $S=(a-s)t+2\int_0^s x^2\,dx$ 임을 알 수 있다. 따라서, 식 ㉠과 점 (s,t)가 포물선 위에 있

다는 것에 의하여 식

$$S= (2st)t + \frac{2}{3}s^3 = 2s^5 + \frac{2}{3}s^3$$

을 얻는다.

(2) 부채꼴의 넓이의 공식을 이용하면 $T = r^2\theta = s^4(4s^2+1)\theta$이다. 따라서 $\lim_{a\to 0+}\theta = \frac{\pi}{2}$를 이용하면

$$\lim_{a\to 0+}\frac{T}{S} = \lim_{s\to 0+}\frac{s(4s^2+1)}{2s^2+\frac{2}{3}}\lim_{a\to 0+}\theta = 0$$

의 극한값을 얻게 된다.

2022학년도 논술고사

자연계열(오전)
채점기준

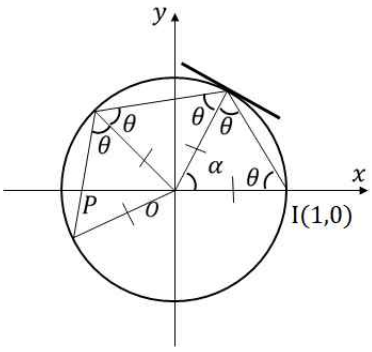
표지를 제외한 페이지 수 :4

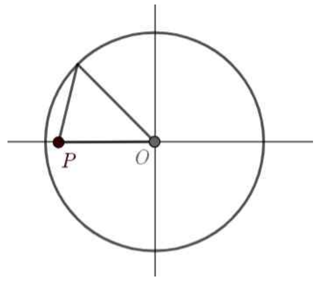
2022학년도 자연계열(오전) 채점기준

자연계열 (오전)

[문제 1-1] (25점)

(1) (10점)





빛의 입사각과 반사각이 같으므로 첫 번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선(x축의 양의 방향 반직선)이 이루는 각을 α라고 두면, $\alpha=\pi-2\theta$이고 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $0<\alpha<\pi$이다. 또한 2번째, 3번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각은 각각 $2\alpha, 3\alpha$가 된다. 문제의 가정에 의해 $2\alpha<\pi<3\alpha$이므로 $\alpha=\pi-2\theta$로 부터 부등식 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$을 얻는다. 4점

이때, 점 $\mathrm{P}(x,0)$에 대하여 선분 OP의 길이는 $-x$이므로, 두 번째 반사지점과 점 P, 원점 O를 꼭지점으로 하는 삼각형과 사인법칙에 의해,

$$\frac{-x}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(2\pi-5\theta)}$$ 4점

이다. 따라서, $\sin(2\pi-5\theta)=-\sin5\theta$에 의해서 $x=\dfrac{\sin\theta}{\sin5\theta}$이다. 2점

(2) (15점) $\theta=\dfrac{7\pi}{24}$이므로 덧셈정리를 이용하여

$$\sin\theta=\sin\frac{7\pi}{24}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{3}-\sqrt{1-a^2}\right\}$$

을 얻고

$$\sin5\theta=\sin\frac{35\pi}{24}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{24}=-a$$

이므로, 점 P의 x좌표는 $\dfrac{\sin\theta}{\sin5\theta}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{2a}$이다. 8점

한편 $2\alpha=2\pi-4\theta=\dfrac{5\pi}{6}$이므로 2번째 반사지점의 좌표는 $(\cos2\alpha,\sin2\alpha)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$이다. 따라서, 2번째 반사지점에서 점 P까지 빛의 이동거리는

$$\sqrt{(x-\cos 2\alpha)^2+(\sin 2\alpha)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2a}$$

이다. 7점

[문제 1-2] (15점)

첫 번째 반사지점을 지나는 동경이 시초선과 이루는 각은 $\alpha=\pi-2\theta=\frac{5\pi}{64}$이다. 두 번째 이상의 각 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 직전 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각에 $\alpha=\frac{5\pi}{64}$을 더한 것이므로, n번째 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 $n\alpha=\frac{5n\pi}{64}$가 된다. 4점

따라서 문제에서 주어진 호 H에 n번째 반사지점이 있다는 것은 어떤 $p=0,1,2,\cdots$에 대하여

$$2p\pi+\frac{18\pi}{64} \le \frac{5n\pi}{64} \le 2p\pi+\frac{21\pi}{64}$$

를 만족한다는 의미가 된다. 4점

빛이 2번째로 호 H와 만나게 되는 순간의 n을 p의 값을 키워가며 찾아간다.

• $p=0$일 때, $\frac{18\pi}{64} \le \frac{5n\pi}{64} \le \frac{21\pi}{64}$를 정리하면 $18 \le 5n \le 21$, 즉 $n=4$이다. 따라서 빛은 4번째 반사지점에서 처음 호 H와 만난다.

• $p=1$일 때, $2\pi+\frac{18\pi}{64} \le \frac{5n\pi}{64} \le 2\pi+\frac{21\pi}{64}$를 정리하면 $146 \le 5n \le 149$인데, 이 부등식을 만족하는 자연수 n은 없다.

• $p=2$일 때, $4\pi+\frac{18\pi}{64} \le \frac{5n\pi}{64} \le 4\pi+\frac{21\pi}{64}$를 정리하면 $274 \le 5n \le 277$이고, $n=55$이다. 따라서, 빛이 2번째로 호 H와 만나는 반사지점은 55번째 반사지점이다. 7점

[문제 1-3] (10점) 점 $\mathrm{I}(1,0)$이 발사된 빛의 반사지점 중 하나가 된다고 가정하자. 그러면 적당한 자연수 n과 p에 대해

$$n\left(\pi-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right)=2p\pi \text{ 또는 } \sqrt{6}=\frac{n}{n-2p}$$

을 만족해야 한다. 5점

하지만, 두 번째 식의 우변이 유리수이므로 $\sqrt{6}$이 무리수라는 사실에 모순이다. 따라서 귀류법에 의하여, 위 식을 만족하는 n과 p를 찾을 수 없고, 점 $\mathrm{I}(1,0)$은 발사각이 $\theta=\frac{\pi}{\sqrt{6}}$인 빛의 반사지점 중 하나가 될

수 없다. 5점

[문제 2-1] (10점)

식 ㉠을 이용하면

$$\sin\theta = \frac{t}{r} = \frac{t}{\sqrt{(a-s)^2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{(2st)^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{4s^2+1}}$$

이고 $\lim_{a\to 0+}\sin\theta = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{\sqrt{4s^2+1}} = 1$이 된다. 6점

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $1=\sin\frac{\pi}{2}$이므로 사인함수의 연속성에 의하여 $\lim_{a\to 0+}\theta = \frac{\pi}{2}$이다. 4점

[문제 2-2] (20점)

(1) (5점) 점 (s,t)와 점 $(a,0)$사이의 거리가 원의 반지름 r이다. 이와 함께 식 ㉠과 점 (s,t)가 포물선 위에 있다는 것을 이용하면 식

$$r = t\sqrt{4s^2+1} = s^2\sqrt{4s^2+1}$$

을 얻는다. 2점

위 식과 식 $2s^3+s=a$를 이용하면

$$\frac{a^n}{r} = \frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}}$$

의 식을 얻게 된다. 3점

(2) (15점) n에 따라 다음의 극한을 관찰할 수 있다.

$n=0$; $\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a^0}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \infty$. 2점

$n=1$; $\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{2s^3+s}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to 0+}\frac{2s^2+1}{s\sqrt{4s^2+1}} = \infty$. 4점

$n=2$; $\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a^2}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^2}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^2}{\sqrt{4s^2+1}} = 1$. 5점

$n \ge 3$; $\quad \lim_{a\to 0+}\frac{a^n}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^n s^{n-2}}{\sqrt{4s^2+1}} = 0$. 4점

따라서 문제에서 구하는 답은 2이상의 정수가 된다.

[문제 2-3] (20점)

(1) (10점) 관찰을 통해 $S = (a-s)t + 2\int_0^s x^2\,dx$ 임을 알 수 있다. 5점

따라서, 식 ㉠과 점 (s,t)가 포물선 위에 있다는 것에 의하여 식

$$S = (2st)t + \frac{2}{3}s^3 = 2s^5 + \frac{2}{3}s^3$$

을 얻는다. -- 5점

(2) (10점) 부채꼴의 넓이의 공식을 이용하면 $T = r^2\theta = s^4(4s^2+1)\theta$이다. 4점

따라서 $\lim_{a\to 0+}\theta = \frac{\pi}{2}$를 이용하면

$$\lim_{a\to 0+}\frac{T}{S} = \lim_{s\to 0+}\frac{s(4s^2+1)}{2s^2+\frac{2}{3}}\lim_{a\to 0+}\theta = 0$$

의 극한값을 얻게 된다. 6점