자연계열(오전)

2021학년도 논술고사

자연계열(오전)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

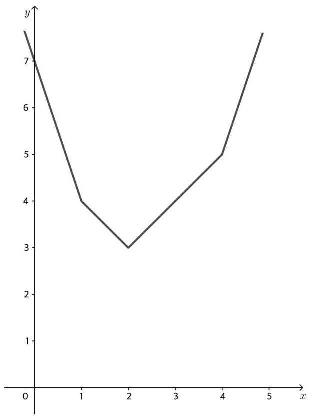
표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

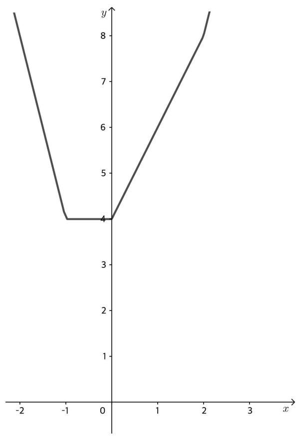
(가) 양의 정수 n에 대하여 n개의 실수 x_1, ... , x_n(단, $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$)을 사용하여 함수 $B(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$B(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| = |x - x_1| + \cdots + |x - x_n|$$

함수 $y = B(x)$의 그래프는 구간 $(-\infty, x_1]$과 구간 $[x_n, \infty)$에서 기울기가 각각 $-n$과 n인 직선이 되며, $x_k \ne x_{k+1}$이면 닫힌구간 $[x_k, x_{k+1}]$에서도 직선이다. 이와 같이 $y = B(x)$의 그래프에 나타나는 직선의 기울기의 집합을 S라 하자. $-n$과 n은 항상 S의 원소이며 S의 원소의 개수는 $n+1$ 이하이다. [그림 1-1]의 왼쪽의 예에서 $y = B(x)$의 그래프에 나타나는 직선의 기울기는 $-3, -1$, 1, 3이므로 $S = \{-3, -1, 1, 3\}$이다.



$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$



$x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

[그림 1-1]

(나) 함수 $f(x)$와 두 실수 x_1과 x_2에 대해, 함수 $C(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$C(x) = (f(x) - f(x_1))^2 + (f(x) - f(x_2))^2$$

실수 a에 대해 $C(a) = 0$이면, $(f(a) - f(x_1))^2 = (f(a) - f(x_2))^2 = 0$ 이므로 $f(a) = f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) $n=401$이고 모든 $1 \le k \le n$에 대하여 $x_k = k$인 n개의 정수 $x_1, x_2, \dots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$를 만들 때, $B(x)$의 최솟값을 구하여라.

(2) 서로 다른 n개의 실수 $x_1, x_2, \dots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$와 집합 S를 만들 때, S의 원소의 제곱의 합을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}$의 값을 구하여라.

(3) 2 이상의 짝수 n에 대해, $1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 3$을 만족하는 n개의 정수 $x_1, x_2, \dots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$와 집합 S를 만들자. S의 원소의 곱이 양수가 되게 하는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$의 개수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(4) 모든 $1 \le k \le n$에 대하여 $-1 < x_k < 1$인 n개의 실수 $x_1, x_2, \dots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$를 만들자. 방정식 $B(x) = n$의 해가 닫힌구간 $[-1, 1]$에 존재하는지 여부를 판단하고 그 이유를 서술하여라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x) = \sec x$ 와 $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$를 사용하여 함수 $C(x)$를 만들 때, $\int C(x)\tan x\,dx$를 구하여라.

(2) 함수 $f(x) = e^{3x} - \cos^2(\pi x)$를 사용하여 함수 $C(x)$를 만들었더니 $\lim_{x\to 1}\dfrac{C(x)}{(\ln x)^2}$가 실수 L로 수렴하였다. 이때 L의 값을 구하여라.

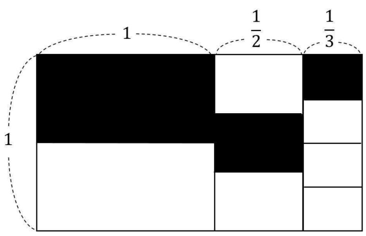
[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) [그림 2-1]과 같이 삼등분 된 모양의 깃발에 인접한 영역을 다른 색으로 칠한 것을 삼색기라 한다. 이때 회전하거나 뒤집어서 두 깃발이 같아지더라도 이들은 서로 다른 것으로 간주한다.

[그림 2-1]

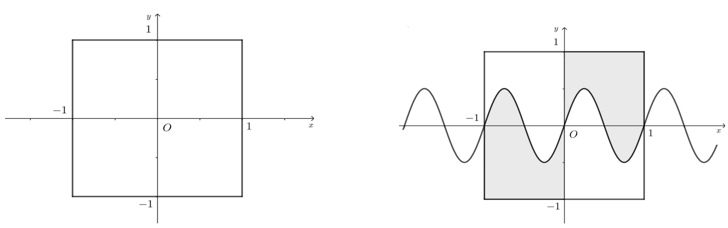
양의 정수 k에 대하여, k가지의 색을 사용하여 삼색기를 만드는 경우의 수를 $r(k)$라 하자. 예를 들어, 삼색기의 이웃하는 영역은 서로 다른 색을 가져야 하므로 곱의 법칙에 의해 $r(2)=2\times1\times1=2$이고, $r(3)=3\times2\times2=12$ 임을 알 수 있다.

(나) 양의 정수 $n(n\geq 2)$에 대하여, n개의 직사각형으로 구성된 깃발이 있고, $1\leq k\leq n$인 정수 k에 대하여 k번째 직사각형의 가로의 길이는 $\dfrac{1}{k}$이고 세로의 길이는 1로 일정하다. 각 k번째 직사각형을 $k+1$개의 합동인 작은 직사각형으로 다시 쪼개어 이 중 한 개를 검은색으로 색칠하고 나머지는 검은색이 아닌 색으로 칠한다. 검은색으로 칠해진 모든 직사각형의 넓이의 합을 b_n, 나머지 부분의 넓이를 a_n이라 하자. [그림 2-2]는 $n=3$일 때 그려지는 깃발의 예이다.



[그림 2-2]

(다) 가로와 세로의 길이가 모두 2인 정사각형 모양의 깃발이 [그림 2-3]의 왼쪽 그림과 같이 좌표평면에 놓여있다. 이때 정사각형의 각 변은 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$의 일부이다. 함수 $f(x)$에 대하여, 깃발이 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 의하여 같은 넓이를 가진 네 영역으로 나눠질 때, $f(x)$가 '균형 잡힌 깃발'을 만든다고 하자. 예를 들어 깃발이 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2\pi x$의 그래프와 y축에 의하여 같은 넓이를 가진 네 영역으로 나눠지므로 함수 $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만든다. ([그림 2-3] 참조)



[그림 2-3]

[문제 2-1] (22점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) $\sum_{k=2}^{n} r(k)$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 5가지의 색을 사용한 $r(5)$개의 모든 삼색기 중에서 임의로 2개를 골랐을 때, 각 깃발에 사용된 색의 집합이 서로소일 확률을 구하여라.

(3) 아래의 그림과 같은 모양을 가진 두 깃발 A와 B가 있다. 3가지의 색을 이용하여 인접한 영역이 서로 다른 색을 가지도록 칠하는 경우의 수를 각각 구하여라. (단, 회전하거나 뒤집어서 두 깃발이 같아지더라도 이들은 서로 다른 것으로 간주한다.)

깃발 A

깃발 B

[문항 2-2] (10점) 제시문 (나)에서 $\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty}(b_n)^{2n+2}$의 수렴, 발산을 각각 조사하고, 수렴한다면 그 값을 구하여라.

[문항 2-3] (18점) 제시문 (다)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a$ (단, $|a| \le \frac{1}{2}$)이 균형 잡힌 깃발을 만들 때, a의 값을 구하여라.

(2) 이차함수 $f(x)=2-bx^2$ (단, $b>3$)이 균형 잡힌 깃발을 만들 때, $\sqrt{b}$의 값을 구하여라.

2021학년도 논술고사

자연계열(오전)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 6

[문제 1-1]

(1) 구간 $(-\infty, 201]$에서 직선의 기울기가 음수이고, 구간 $[201, \infty)$에서 기울기가 양수이다. 따라서 그래프의 개형으로부터 $x=201$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $B(201)=\sum_{k=1}^{401}|201-k|$가 최솟값이 되며, 이를 계산하면

$B(201)=2\sum_{k=1}^{200}k=2\cdot\frac{200\times 201}{2}=200\times 201=40200$ 이다.

(2) x_k들이 모두 다르기 때문에, 집합 S는 $n+1$개의 원소를 가지고 다음과 같은 형태를 가진다.

$$S=\{-n, -(n-2), \dots, n-2, n\}$$

따라서 S의 원소들의 제곱의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-n+2i)^2 &= \sum_{i=0}^{n}(n^2-4ni+4i^2)=n^2(n+1)-4n\sum_{i=1}^{n}i+4\sum_{i=1}^{n}i^2\\ &=n^2(n+1)-4n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &=-n^2(n+1)+\frac{2}{3}\cdot n(n+1)(2n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

이고, a_n은 n에 대한 삼차식으로 최고차항이 $\frac{1}{3}n^3$이 되어 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{1}{3}$이다.

(3) $x_k=1$인 k의 개수를 a_1, $x_k=2$인 k의 개수를 a_2, $x_k=3$인 k의 개수를 a_3이라 하고 다음 ①과 ②를 생각하자.

① a_1, a_2 a_3가 모두 양수인 경우:

집합 $S=\{-a_1-a_2-a_3,\ -a_1-a_2+a_3,\ -a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3\}$이 된다.

이때 $-a_1-a_2-a_3=-n$ 이고 $a_1+a_2+a_3=n$ 이므로 S의 원소의 곱이 양수가 되기 위해서는 $-a_1-a_2+a_3=-n+2a_3<0$ 이고 $-a_1+a_2+a_3=n-2a_1>0$ 이어야 한다.

즉, a_1과 a_3은 모두 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수이므로 a_2가 결정되고, 모든 가능한 경우의 수는 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2$이다.

② a_1, a_2 a_3 중 어느 하나가 0인 경우:

a_1, a_2 a_3 중 0인 것이 2개이면, $S=\{-n, n\}$이 되어 S의 원소의 곱이 항상 음수가 되어 모순이다. 따라서 정확히 하나만 0이 되는데, $a_i=0$이고 $a_j, a_l>0$ (단, $j<l$)이라 두자. 그러면, $S=\{-a_j-a_l,\ -a_j+a_l,\ -a_j+a_l\}$이고 $-a_j-a_l=-n$ 이고 $a_j+a_l=n$ 이므로 $-a_j+a_l<0$가 성립해야 한다. 즉 가능한 경우는 a_l이 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수인 경우로 총 경우의 수는 $\frac{n}{2}-1$이 된다.

$a_i=0$인 i를 고르는 방법이 3가지이므로, 이 경우 가능한 경우의 수는 $\frac{3n}{2}-3$이다.

따라서 ①과 ②의 경우를 고려하면 S의 원소의 곱이 양수가 되는 n에 대한 식은 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{3n}{2}-3=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}-2$ 이다.

(4) $|x_k| < 1$로부터 $B(1) = n - \sum x_k$, $B(-1) = n + \sum x_k$이다.

$B(1) = n$이면 $x = 1$이 $B(x) = n$의 해가 된다.

$B(1) \neq n$이면, $B(1) + B(-1) = 2n$이므로 $B(1) < n$, $B(-1) > n$이거나 $B(1) > n$, $B(-1) < n$이다. 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1, 1)$에서 방정식 $B(x) - n = 0$은 적어도 1개의 해를 가진다. 따라서 방정식 $B(x) = n$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 항상 해를 가진다.

[문제 1-2]

(1) $\sec 0 = 1$, $\sec\frac{\pi}{3} = 2$이므로 $C(x) = (1-\sec x)^2 + (2-\sec x)^2 = 5 - 6\sec x + 2\sec^2 x$이다. 따라서

$\int C(x)\tan x\,dx = 5\int \tan x\,dx - 6\int \tan x \sec x\,dx + 2\int \sec^2 x \tan x\,dx$이다.

한편 $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$, $\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$,

$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{\sec^2 x}{2} + C$ 이므로, $\int C(x)\tan x\,dx = -5\ln|\cos x| - 6\sec x + \sec^2 x + C$ 가 된다.

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2}$ 이 수렴하고 분모의 극한 $\lim_{x\to 1}(\ln x)^2 = 0$ 이므로 분자의 극한도 $\lim_{x\to 1}C(x) = 0$ 이다.

$C(x)$가 연속함수이므로, $0 = \lim_{x\to 1}C(x) = C(1) = (f(1)-f(x_1))^2 + (f(1)-f(x_2))^2$ 이 되어

$f(1) = f(x_1) = f(x_2)$이고, $C(x) = 2(f(x)-f(1))^2$이다.

이를 계산하기 위해 $\ln x = t$로 치환하면,

$\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2} = 2\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{\ln x}\right)^2 = 2\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(e^t)-f(e^0)}{t}\right)^2$ 이 된다.

$g(t) = f(e^t)$ 라 두면, $g'(t) = f'(e^t)e^t$이며, 미분 계수의 정의로부터

$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(0) = f'(1) = 3e^3$이다. 따라서 답은 $18e^6$이다.

[문제 2-1]

(1) k가지 색을 사용해서 삼색기를 칠하는 방법의 수는 깃발의 이웃하는 영역을 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수이다. 이는 곱의 법칙에 의해 $r(k) = k(k-1)(k-1)$이 된다.

$$\sum_{k=2}^{n} r(k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(k-1) = \sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)\ell^2 = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^3 + \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2)$$

(2) 5가지 색으로 만드는 삼색기의 총 경우의 수 $r(5) = 5 \times 4^2 = 80$이므로 이 중 두 개의 깃발을 뽑는 경우의 수는 ${}_{80}C_2 = 40 \times 79 = 3160$이다.

각 삼색기를 색칠하기 위해서는 두 개 혹은 세 개의 색을 사용해야 한다. 골라진 두 깃발 모두가 세 개의 색을 사용하고 서로 중복되는 색이 사용되지 않았다면 최소 여섯 개의 색이 필요하다. 따라서 주어진 조건을 만족하기 위해서는 두 깃발 모두 두 개의 색을 사용하거나(①), 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 사용(②)하여야 한다.

① 두 깃발 모두 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_2 \times 2 \times {}_3C_2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 60$

② 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_3 \times 3! \times {}_2C_2 \times 2 = 120$

①과 ②에 따라서 원하는 확률은 $\dfrac{60+120}{3160} = \dfrac{9}{158}$

(3) ⅰ) 깃발 A를 칠하는 경우:

①	②	③
④	⑤	⑥

먼저 ②영역과 ④영역의 색이 같은 경우를 생각하면 ①과 ②의 색 선택은 모두 3×2가지 경우가 있고, ③과 ⑤의 색이 같은 경우(4가지)와 다른 경우(2가지)를 고려하면, 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $6 \times (4+2) = 36$가지이다. 비슷하게 ②영역과 ④영역의 색이 다른 경우를 생각하면 $6 \times (2+1) = 18$가지이다. 따라서 A를 칠하는 경우의 수를 a라 하면, $a = 36 + 18 = 54$이다.

ⅱ) 깃발 B를 칠하는 경우:

깃발 B를 칠하기 위해 아래 표시된 A와 모양이 동일한 부분을 생각하자.

		③		
		⑥		

③, ⑥ 부분에 칠할 수 있는 경우의 수는 모두 6가지이므로 ③, ⑥의 색이 정해져 있다면 표시된 부분을 색칠할 수 있는 경우의 수는 $\frac{a}{6}$가지. 따라서 B를 색칠하는 경우의 수는 먼저 처음 세 줄을 색칠하고(a가지) 뒤의 두 줄을 색칠하는($\frac{a}{6}$가지)를 색칠하는 경우와 같으므로 곱의 법칙에 의해 $a \times \frac{a}{6} = 486$이다.

[문제 2-2]

k번째 직사각형 안에 검은색으로 칠해지는 부분의 넓이는 $\frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1}$이다.

따라서 $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$로 수렴한다.

또한 이 깃발 전체의 넓이는 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$이고,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n = \infty$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$이다. $S_n = a_n + b_n$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다.

한편, $-\frac{1}{n+1} = h$라 놓으면 $n \to \infty$일 때, $h \to 0$이므로,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{2(n+1)} = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h} \times (-2)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

이므로 수렴한다.

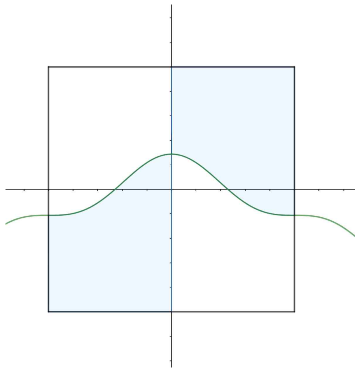
[문제 2-3]

(1) $|a| \le \frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $-1 \le x \le 1$ 범위에서 $-1 \le f(x) \le 1$을 만족하므로 정사각형 내부에 그려진다. 또한 $f(x)$는 y축에 대한 대칭이다. 따라서 $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = 0$을 만족하는 a를 구하면 충분하다.

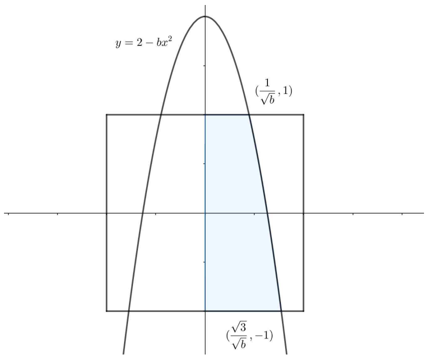
한편, $\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)= \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)- \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$이므로

$\int \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)- \frac{2}{3\pi}sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+ C$ (단, C는 적분 상수)

이고, 이를 이용하면 $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = \frac{1}{\pi}- \frac{1}{3\pi}+a = 0$ 이다. 따라서 $a =-\frac{2}{3\pi}$이다.



(2) $f(x) = 2 - bx^2$는 y축에 대한 대칭인 함수이고 $b > 3$이므로 아래 그림과 같은 개형을 가지고 있다. $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만들기 위해서는 아래 그림의 색칠된 넓이가 1이 되어야 한다.



$f(x) = 2 - bx^2$과 정사각형의 윗변과 아랫변이 만나는 점을 $x > 0$범위에서 구해보면 각각 점 $\left(\frac{1}{\sqrt{b}}, 1\right)$, 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}, -1\right)$ 이다. 따라서 위 부분의 넓이는

$$1 = \frac{2}{\sqrt{b}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}} (2 - bx^2 + 1)\,dx$$

이므로 이를 계산하면 $\sqrt{b} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$을 얻을 수 있다.

2021학년도 논술고사

자연계열(오전)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 7

[문제 1-1] (30점)

(1) (6점) 구간 $(-\infty, 201]$에서 직선의 기울기가 음수이고, 구간 $[201, \infty)$에서 기울기가 양수이다. 따라서 그래프의 개형으로부터 $x=201$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다. (3점)

따라서 $B(201) = \sum_{k=1}^{401}|201-k|$가 최솟값이 되며, 이를 계산하면

$B(201) = 2\sum_{k=1}^{200}k$ (1 점) $= 2\cdot\dfrac{200\times 201}{2} = 200\times 201 = 40200$ 이다. (2점)

(2) (7점) x_k들이 모두 다르기 때문에, 집합 S는 $n+1$개의 원소를 가지고 다음과 같은 형태를 가진다.

$$S=\{-n, -(n-2), \cdots, n-2, n\} \text{ (2점)}$$

따라서 S의 원소들의 제곱의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-n+2i)^2 &= \sum_{i=0}^{n}(n^2-4ni+4i^2) = n^2(n+1)-4n\sum_{i=1}^{n}i+4\sum_{i=1}^{n}i^2\\ &= n^2(n+1)-4n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= -n^2(n+1)+\frac{2}{3}\cdot n(n+1)(2n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \text{(3점)}\end{aligned}$$

이고, a_n은 n에 대한 삼차식으로 최고차항이 $\frac{1}{3}n^3$이 되어 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{1}{3}$이다. (2점)

(3) (9점) $x_k=1$인 k의 개수를 a_1, $x_k=2$인 k의 개수를 a_2, $x_k=3$인 k의 개수를 a_3이라 하고 다음 ①과 ②를 생각하자. (1점)

① a_1, a_2 a_3가 모두 양수인 경우:

집합 $S=\{-a_1-a_2-a_3, -a_1-a_2+a_3, -a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3\}$이 된다.

이때 $-a_1-a_2-a_3=-n$ 이고 $a_1+a_2+a_3=n$ 이므로 S의 원소의 곱이 양수가 되기 위해서는 $-a_1-a_2+a_3=-n+2a_3<0$ 이고 $-a_1+a_2+a_3=n-2a_1>0$ 이어야 한다.

즉, a_1과 a_3은 모두 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수이므로 a_2가 결정되고, 모든 가능한 경우의 수는 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2$이다. (4점)

② a_1, a_2 a_3 중 어느 하나가 0인 경우:

a_1, a_2 a_3 중 0인 것이 2개이면, $S=\{-n, n\}$이 되어 S의 원소의 곱이 항상 음수가 되어 모순이다. 따라서 정확히 하나만 0이 되는데, $a_i=0$이고 $a_j, a_l>0$ (단, $j<l$)이라 두자. 그러면, $S=\{-a_j-a_l, -a_j+a_l, -a_j+a_l\}$이고 $-a_j-a_l=-n$ 이고 $a_j+a_l=n$ 이므로 $-a_j+a_l<0$가 성립해야 한다. 즉 가능한 경우는 a_l이 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수인 경우로 총 경우의 수는 $\frac{n}{2}-1$이 된다. $a_i=0$인 i를 고르는 방법이 3가지이므로, 이 경우 가능한 경우의 수는 $\frac{3n}{2}-3$이다. (3점)

따라서 ①과 ②의 경우를 고려하면 S의 원소의 곱이 양수가 되는 n에 대한 식은

$\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{3n}{2}-3=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}-2$ 이다. (1점)

(4) (8점) $|x_k|<1$로부터 $B(1)=n-\sum x_k$, $B(-1)=n+\sum x_k$이다. (1점)

$B(1)=n$이면 $x=1$이 $B(x)=n$의 해가 된다. (2점)

$B(1)\neq n$이면, $B(1)+B(-1)=2n$이므로 $B(1)<n$, $B(-1)>n$이거나 $B(1)>n$, $B(-1)<n$이다. (2점)

사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1,1)$에서 방정식 $B(x)-n=0$은 적어도 1개의 해를 가진다. (2점)

따라서 방정식 $B(x)=n$은 닫힌구간 $[-1,1]$에서 항상 해를 가진다. (1점)

[문제 1-2] (20점)

(1) (10점) $\sec 0 = 1$, $\sec\frac{\pi}{3} = 2$이므로 $C(x) = (1-\sec x)^2 + (2-\sec x)^2 = 5 - 6\sec x + 2\sec^2 x$이다. (2점)

따라서 $\int C(x)\tan x\,dx = 5\int \tan x\,dx - 6\int \tan x\sec x\,dx + 2\int \sec^2 x\tan x\,dx$이다.

한편

$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ (2점)

$\int \tan x\sec x dx = \sec x + C$ (2점)

$\int \sec^2 x\tan x dx = \frac{\sec^2 x}{2} + C$ (혹은 $\int \sec^2 x\tan x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$) (2점)

이므로, $\int C(x)\tan x\,dx = -5\ln|\cos x| - 6\sec x + \sec^2 x + C$ 가 된다. (2점)

($\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$이므로, $\int C(x)\tan x\,dx = -5\ln|\cos x| - 6\sec x + \tan^2 x + C$ 도 정답)

(2) (10점) $\lim_{x\to1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2}$ 이 수렴하고 분모의 극한 $\lim_{x\to1}(\ln x)^2 = 0$ 이므로 분자의 극한도 $\lim_{x\to1}C(x) = 0$ 이다. (2점)

$C(x)$가 연속함수이므로, $0 = \lim_{x\to1}C(x) = C(1) = (f(1) - f(x_1))^2 + (f(1) - f(x_2))^2$ 이 되어

$f(1) = f(x_1) = f(x_2)$이고, $C(x) = 2(f(x) - f(1))^2$이다. (3점)

이를 계산하기 위해 $\ln x = t$로 치환하면,

$$\lim_{x\to1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2} = 2\cdot\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{\ln x}\right)^2 = 2\cdot\lim_{t\to0}\left(\frac{f(e^t)-f(e^0)}{t}\right)^2 \text{ 이 된다.}$$

$g(t) = f(e^t)$ 라 두면, $g'(t) = f'(e^t)\,e^t$이며, 미분 계수의 정의로부터

$\lim_{t\to0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(0) = f'(1) = 3e^3$이다. (3점)

따라서 답은 $18e^6$이다. (2점)

[문제 2-1] (22점)

(1) (5점) k가지 색을 사용해서 삼색기를 칠하는 방법의 수는 깃발의 이웃하는 영역을 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수이다. 이는 곱의 법칙에 의해 $r(k)=k(k-1)(k-1)$이 된다. (2점)

$$\sum_{k=2}^{n} r(k)=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(k-1)=\sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)\ell^2=\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^3+\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^2=\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2)$$

(3점)

(2) (8점) 5가지 색으로 만드는 삼색기의 총 경우의 수 $r(5)=5\times4^2=80$이므로 이 중 두 개의 깃발을 뽑는 경우의 수는 ${}_{80}C_2=40\times79=3160$이다.

각 삼색기를 색칠하기 위해서는 두 개 혹은 세 개의 색을 사용해야 한다. 골라진 두 깃발 모두가 세 개의 색을 사용하고 서로 중복되는 색이 사용되지 않았다면 최소 여섯 개의 색이 필요하다. 따라서 주어진 조건을 만족하기 위해서는 두 깃발 모두 두 개의 색을 사용하거나(①), 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 사용(②)하여야 한다. (2점)

① 두 깃발 모두 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_2\times2\times{}_3C_2\times2\times\frac{1}{2}=60$ (2점)

② 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_3\times3!\times{}_2C_2\times2=120$ (2점)

①과 ②에 따라서 원하는 확률은 $\frac{60+120}{3160}=\frac{9}{158}$ (2점)

(3) (9점) ⅰ) 깃발 A를 칠하는 경우:

①	②	③
④	⑤	⑥

먼저 ②영역과 ④영역의 색이 같은 경우를 생각하면 ①과 ②의 색 선택은 모두 3×2가지 경우가 있고, ③과 ⑤의 색이 같은 경우(4가지)와 다른 경우(2가지)를 고려하면, 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $6\times(4+2)=36$가지이다. 비슷하게 ②영역과 ④영역의 색이 다른 경우를 생각하면 $6\times(2+1)=18$가지이다. 따라서 A를 칠하는 경우의 수를 a라 하면, $a=36+18=54$이다. (4점)

ⅱ) 깃발 B를 칠하는 경우:

깃발 B를 칠하기 위해 아래 표시된 A와 모양이 동일한 부분을 생각하자.

		③		
		⑥		

③, ⑥ 부분에 칠할 수 있는 경우의 수는 모두 6가지이므로 ③, ⑥의 색이 정해져 있다면 표시된 부분을 색칠할 수 있는 경우의 수는 $\frac{a}{6}$가지. 따라서 B를 색칠하는 경우의 수는 먼저 처음 세 줄을 색칠하고(a가

지) 뒤의 두 줄을 색칠하는($\frac{a}{6}$가지)를 색칠하는 경우와 같으므로 곱의 법칙에 의해 $a\times\frac{a}{6}=486$이다. (5점)

[문제 2-2] (10점)

k번째 직사각형 안에 검은색으로 칠해지는 부분의 넓이는 $\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}$이다. 따라서 $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$(2점)이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$로 수렴한다.

또한 이 깃발 전체의 넓이는 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$이고,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\cdots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n=\infty$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$이다. $S_n=a_n+b_n$이고, $\lim_{n\to\infty}b_n=1$ 이므로 (3점)

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이다. (1점)

한편, $-\frac{1}{n+1}=h$라 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{2n+2}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{2(n+1)}=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}\times(-2)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}\ \ (3점)$$

이므로 수렴한다. (1점)

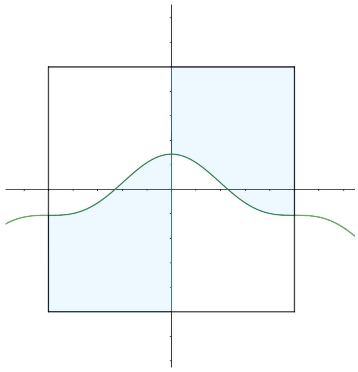
[문제 2-3] (18점)

(1) (9점) $|a| \le \frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $-1 \le x \le 1$ 범위에서 $-1 \le f(x) \le 1$을 만족하므로 정사각형 내부에 그려진다. 또한 $f(x)$는 y축에 대한 대칭이다. 따라서 $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = 0$을 만족하는 a를 구하면 충분하다. (3점)

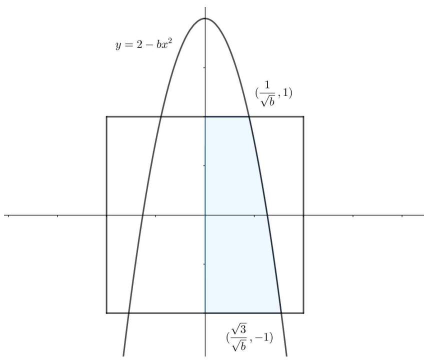
한편, $\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$이므로

$\int \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{2}{3\pi}sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+C$ (단, C는 적분 상수) (3점)

이고, 이를 이용하면 $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = \frac{1}{\pi}-\frac{1}{3\pi}+a=0$ 이다. 따라서 $a=-\frac{2}{3\pi}$이다. (3점)



(2) (9점) $f(x)=2-bx^2$는 y축에 대한 대칭인 함수이고 $b>3$이므로 아래 그림과 같은 개형을 가지고 있다. $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만들기 위해서는 아래 그림의 색칠된 넓이가 1이 되어야 한다. (1점)



$f(x)=2-bx^2$과 정사각형의 윗변과 아랫변이 만나는 점을 $x>0$범위에서 구해보면 각각 점 $\left(\frac{1}{\sqrt{b}}, 1\right)$, 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}, -1\right)$ 이다. (2점)

따라서 위 부분의 넓이는

$$1 = \frac{2}{\sqrt{b}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}} (2-bx^2+1)\,dx \quad (3점)$$

이므로 이를 계산하면 $\sqrt{b}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$을 얻을 수 있다. (3점)

자연계열(오후)

2021학년도 논술고사

자연계열(오후)

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 3

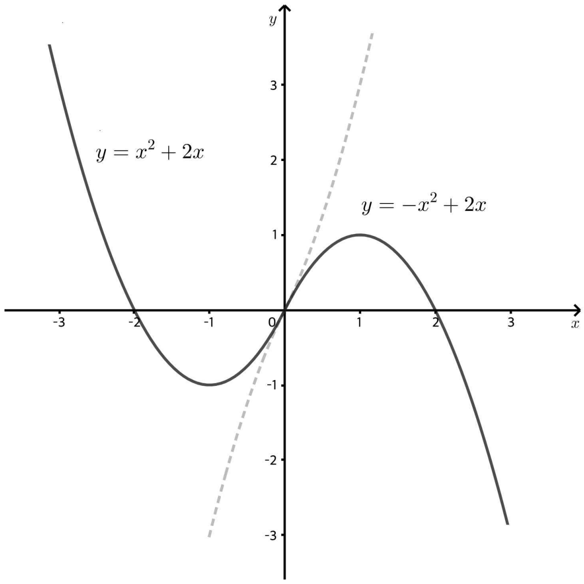
[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$를 만족하면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$ 에서 '만난다'고 하고, 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ g(x) & (x > a) \end{cases}$$

를 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 '갈아타는 함수'라 하자. 또한 $x=a$에서 만나는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여, $f(x)$와 $g(x)$가 각각 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)=g'(a)$이면, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 '부드럽게 만난다'고 하자.

예를 들어, 두 함수 $f(x)=x^2+2x$ 와 $g(x)=-x^2+2x$ 에 대하여, $f(0)=g(0)=0$이고 $f'(0)=g'(0)=2$ 이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 부드럽게 만난다. [그림 1-1]은 $f(x)$ 에서 $g(x)$로 $x=0$ 에서 갈아타는 함수의 그래프이다.



[그림 1-1]

(나) 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다. 즉, 곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면 $g(a)=f(a)$이고, $g'(a)=f'(a)$이므로, $f(x)$와 $g(x)$는 $x=a$에서 부드럽게 만난다. 따라서 임의의 실수 a에 대해서 $f(x)$와 $x=a$에서 부드럽게 만나는 직선은 존재한다.

함수 $f(x)$와 두 점에서 부드럽게 만나는 이차함수는 존재하지 않을 수 있다. 가령 함수 $f(x)=e^x$과 $x=0$, $x=2$에서 동시에 만나는 이차함수는 항상 찾을 수 있지만, 두 점 모두에서 부드럽게 만나는 이차함수는 존재하지 않는다.

[문제 1-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수 c에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-3x-6$과 $g(x)=x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만난다. a가 정수가 아닐 때, $27c$의 값을 구하여라.

(2) 두 함수 $f(x)=x^4-2x^2-2x$와 $g(x)=\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{1}{2}$이 $x=a$에서 부드럽게 만난다. 함수 $h(x)$를 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 갈아타는 함수라고 할 때, $\int_0^2 h(x)\,dx$를 계산하여라.

[문제 1-2] (15점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 양의 정수 n에 대해, 함수 $f(x)=2^x$과 $x=n$에서 부드럽게 만나는 직선의 방정식을 $y=a_n x+b_n$ (단, a_n, b_n은 실수)라 할 때, $\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=e^x$과 이차함수 $g(x)$는 $x=0$에서 부드럽게 만나고 $x=2$에서 만난다. 점 $\mathrm{P}(2,e^2)$에서 $y=f(x)$의 접선과 점 P에서의 $y=g(x)$의 접선이 이루는 예각을 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

[문제 1-3] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수 b와 c에 대하여 두 함수 $f(x)=-x^4-2x^2+b$와 $g(x)=-\frac{4}{3}x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만난다고 하자. $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 갈아타는 함수의 최댓값이 20일 때 $3(a+b+c)$의 값을 구하여라.

(2) 실수 d에 대하여 두 함수 $f(x)=\sin 2x+d$와 $g(x)=-\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$이 $x=a$에서 부드럽게 만난다고 하자. $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 갈아타는 함수의 최댓값을 M이라 하면, M이 가장 클 때의 d의 값을 구하여라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 주머니에 빨간 공이 r개, 파란 공이 b개 있다. 주머니에서 공 하나를 임의로 꺼내서 색을 확인한 다음 다시 주머니에 넣고, 방금 꺼낸 공과 같은 색의 공을 하나 더 가져와 주머니에 넣는 것을 1회 시행이라고 하자. 즉, 시행을 1회 할 때마다 주머니 속의 공의 개수는 하나씩 늘어난다. 예를 들어 $r=2$이고 $b=1$인 경우 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 파란 공이면, 첫 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공과 파란 공이 각각 정확히 2개씩 있다.

(나) 주머니에 빨간 공이 r개, 파란 공이 b개, 흰 공이 w개 있다. 수열 $\{a_n\}$을 음이 아닌 정수로 이루어진 수열이라고 하자. 양의 정수 n에 대하여 n번째 시행에서 공 하나를 임의로 꺼내서 색을 확인한 다음 다시 주머니에 넣고, 방금 꺼낸 공과 같은 색의 공을 a_n개 더 가져와 주머니에 넣는다. 예를 들어 $r=1$, $b=w=2$이고 $a_n=3n$인 경우, 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이면 첫 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공이 4개, 파란 공과 흰 공이 각각 2개씩 있다. 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 파란 공이면, 두 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공이 4개, 파란 공이 8개, 흰 공이 2개 있다.

[문제 2-1] (21점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) r과 b가 양의 정수일 때, 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 r, b에 대한 식으로 나타내어라.

(2) $r=2$ 이고 $b=1$ 이라 하자. 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이었을 때, 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이었을 확률을 구하여라.

(3) $r=2$ 이고 $b=1$ 인 경우, 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률을 구하여라.

[문제 2-2] (29점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\{a_n\}$이 $a_n=n$ 이고, $r=b=1$, $w=2$ 라 하자. 2회 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.

(2) 수열 $\{a_n\}$은 양의 정수로 이루어진 수열이고, $r=b=w=1$ 이라 하자. 10 이하의 모든 양의 정수 n에 대하여 n회 시행을 마친 직후에는 주머니의 공의 개수가 3^n+2이고, 10회 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수는 547이다. 4번째 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수를 구하여라.

(3) 수열 $\{a_n\}$은 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$을 만족하는 음이 아닌 정수로 이루어진 수열이고, $r=b=w=1$ 이라 하자. 100회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공, 파란 공, 흰 공의 개수는 각각 2, 12, 4940 이다. 파란 공을 꺼낸 횟수를 m이라 할 때, 가능한 m의 값을 모두 구하고 $\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$ 의 값을 구하여라.

2021학년도 논술고사

자연계열(오후)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 6

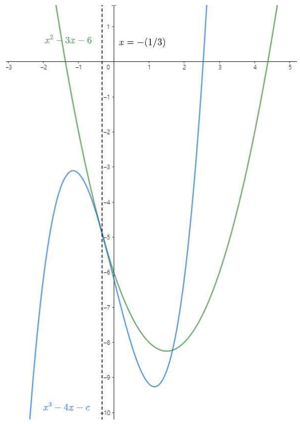
2021학년도 자연계열(오후) 모범답안

자연계열
(오후)

[문제 1-1]

(1) 두 함수 $f(x)=x^2-3x-6$과 $g(x)=x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^2-3a-6=a^3-4a+c$ 이고 $2a-3=3a^2-4$이다.

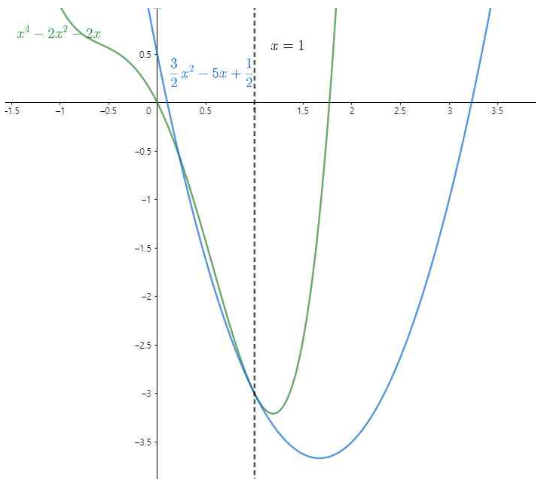
이를 풀면 $2a-3=3a^2-4$로부터, $3a^2-2a-1=(3a+1)(a-1)=0$ 이 되고 a는 정수가 아니므로 $a=-\dfrac{1}{3}$이다. 이제 $a^2-3a-6=a^3-4a+c$에 $a=-\dfrac{1}{3}$을 대입하면 $\dfrac{1}{9}+1-6=-\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{3}+c$이므로 $27c=-167$이다.



(2) $f(x)=x^4-2x^2-2x$과 $g(x)=\dfrac{3}{2}x^2-5x+\dfrac{1}{2}$이 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^4-2a^2-2a=\dfrac{3}{2}a^2-5a+\dfrac{1}{2}$이고 $4a^3-4a-2=3a-5$이다.

이를 풀면 $4a^3-4a-2=3a-5$로부터, $4a^3-7a+3=(a-1)(2a-1)(2a+3)=0$이고 따라서 가능한 a의 값은 1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{3}{2}$ 이다. 이 중 $a^4-2a^2-2a=\dfrac{3}{2}a^2-5a+\dfrac{1}{2}$을 만족하는 것을 찾으면 $a=1$ 이다. 따라서 $h(x)$는 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=1$에서 갈아타는 함수이고, 주어진 식을 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx &= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)+\left(4-10+1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{149}{30}\end{aligned}$$



[문제 1-2]

(1) 양의 정수 n에 대해, $y=2^x$와 $x=n$에서 부드럽게 만나는 직선의 방정식은 $x=n$에서의 접선이다. $f'(n)=2^n\ln 2$이고 점 $(n, 2^n)$을 지나므로 접선의 방정식은 $y-2^n=2^n\ln 2(x-n)$가 되어 $a_n=\ln 2\,(e^{n\ln 2})=2^n\ln 2$ 이고, $b_n=2^n-n2^n\ln 2$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{\ln 2}-n\right)=\frac{100}{\ln 2}-5050$ 이다.

(2) $g(x)=px^2+qx+r$이라 하자. $g(0)=f(0)$로부터 $r=1$이고 $g'(0)=f'(0)$로부터 $q=1$이다. $g(2)=f(2)$로부터 $p=\frac{e^2-3}{4}$이므로 $g(x)=\frac{e^2-3}{4}x^2+x+1$이다.

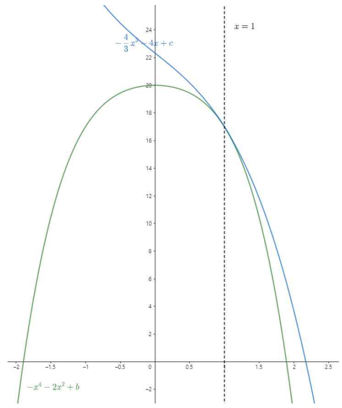
함수 $f(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^2$이고, 함수 $g(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=e^2-2$이고, θ는 예각이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta=\frac{e^2-(e^2-2)}{1+e^2(e^2-2)}=\frac{2}{(e^2-1)^2}$$

이다.

[문제 1-3]

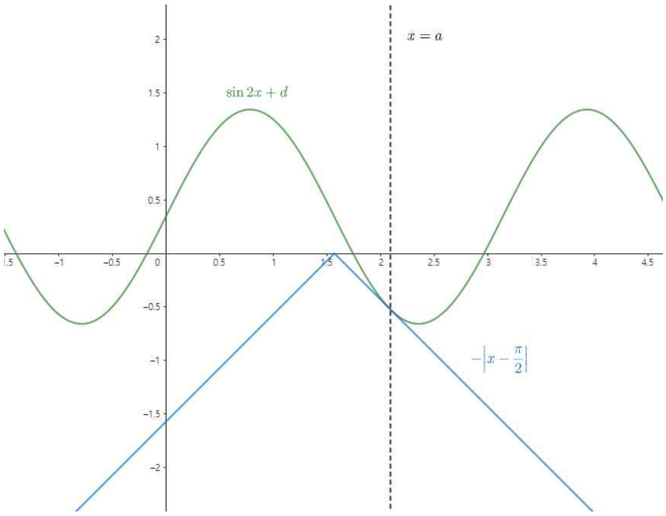
(1) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + b$와 $g(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 - 4x + c$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a) = g(a)$이고 $f'(a) = g'(a)$이다. 즉, $-4a^3 - 4a = -4a^2 - 4$로부터, $4(a^2+1)(a-1) = 0$이므로 $a = 1$이다. 한편, $g(x)$는 $x \ge 1$에서 감소하므로 $h(x)$의 최댓값은 구간 $(-\infty, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값과 같고, 따라서 $f(x)$의 극댓값 혹은 $f(1)$에서 최댓값을 가진다. $f'(x) = -4(x^2+1)x = 0$의 실수해는 $x = 0$이므로 $f(0)$와 $f(1)$의 값을 비교하면 $f(0) = b$이고 $f(1) = b - 6$이므로 b 최댓값이다. 즉, $b = 20$이다. $f(1) = g(1)$로부터, $-3 + b = -\dfrac{16}{3} + c$이고 $c = 17 + \dfrac{16}{3}$이다. 따라서 $3(a+b+c) = 3\left(1 + 20 + 17 + \dfrac{16}{3}\right) = 130$ 이다.



(2) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로, $f(a) = g(a)$이고 $a \ne \dfrac{\pi}{2}$이며, $f'(a) = g'(a)$이다. $f(a) = g(a)$로부터, $d = -\sin 2a - \left|a - \dfrac{\pi}{2}\right|$가 된다. $f(x)$에서 $g(x)$로 $x = a$에서 갈아타는 함수의 최댓값 M은 $d+1$ 혹은 0이다. 따라서 $1 + d > 0$인 d의 존재여부와 존재하는 경우 그 최댓값을 살펴보면 된다. $\left|a - \dfrac{\pi}{2}\right| \ge 2$이면 $1 + d = 1 - \sin 2a - \left|a - \dfrac{\pi}{2}\right| \le 0$ 이므로 $\left|a - \dfrac{\pi}{2}\right| < 2$이라 가정하자. 먼저 $a \le \dfrac{\pi}{2}$라 하자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = 1$이므로 $a = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ 혹은 $a = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$ (단, k는 정수) 꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\dfrac{\pi}{6}$뿐이다. 이때 $d + 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left|\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2}\right| + 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{3} + 1 < 0$ 이다.

$a > \dfrac{\pi}{2}$인 경우를 살펴보자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = -1$이므로 $a = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ 혹은 $a = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$ (단, k는 정수) 꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\dfrac{2\pi}{3}$ 뿐이다. 이때 $d + 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} + 1 > 0$이다.

따라서 M이 최대가 되는 경우는 $a = \dfrac{2\pi}{3}$이고 $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$일 때이다.


$x = a$
$\sin 2x + d$
$-\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$

[문제 2-1]

(1) 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 경우를 나눠서 계산하자. 첫 번째 공이 빨간 공인 경우의 확률은 $\frac{r}{r+b}\times\frac{r+1}{r+b+1}$이고, 첫 번째 공이 파란 공인 경우의 확률은 $\frac{b}{r+b}\times\frac{r}{r+b+1}$이다.

따라서 확률의 덧셈정리에 의해 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률은 $\frac{r(r+1)+br}{(r+b)(r+b+1)}=\frac{r}{r+b}$이다.

(2) 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 경우는 모두 4가지이다. 빨간 공을 꺼내는 시행을 R, 파란 공을 꺼내는 시행을 B이라 하고 각 경우의 확률을 구하면 아래와 같다.

R-R-R : $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{60}$ ⋯ ①

B-R-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ②

R-B-R : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ③

B-B-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{60}$ ⋯ ④

따라서 조건부확률은 $\frac{①+②}{①+②+③+④}=\frac{24+6}{24+6+6+4}=\frac{3}{4}$이다.

(3) 2021회 시행 직후 공의 수는 2024개이고 빨간 공과 파란 공의 개수가 1012개로 같아야 하므로 빨간 공은 1010번, 파란 공은 1011번 꺼내져야 한다.

이렇게 공을 꺼내는 각 경우의 확률이 모두 $\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$와 같으므로 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률은

$${}_{2021}C_{1010}\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}=\frac{2021!}{1010!\times1011!}\cdot\frac{2\times(1011!)^2}{2023!}=\frac{2\times1011}{2022\times2023}=\frac{1}{2023}$$

가 된다.

[문제 2-2]

(1) 각 시행에서 꺼낸 공을 흰 공인 경우(W)와 흰 공이 아닐 경우(C)로 나누자. 각 경우의 확률과 X, X^2을 각각 구하면 아래와 같다.

C-C : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=2$, $X^2=4$

W-C : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=3$, $X^2=9$

C-W : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=4$, $X^2=16$

W-W : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=5$, $X^2=25$

즉, $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{137}{10}$이다. 따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{29}{20}$이다.

(2) $3+a_1+\cdots+a_n=3^n+2$이므로 $a_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$이다. $2\cdot 3^6>546$이므로 $547-1=546$은 $2\cdot 3^0, 2\cdot 3^1, \dots, 2\cdot 3^5$의 조합만으로 이루어져야 한다. 한편, 그러한 조합은 $547=1+2(3+3^3+3^5)$으로 유일함을 알 수 있다. 즉, 흰 공은 2, 4, 6번째 뽑혔다. 따라서 4번째 시행 직후 흰 공의 개수는 $1+6+54=61$ 개이다.

(3) 수열 $\{a_n\}$이 모든 n에 대해 $a_n\ge 0$, $a_{n+1}>a_n$이므로 $a_n\ge n-1$이다.
$2+12+4940=4954=3+a_1+a_2+\cdots+a_{100}\ge 3+0+1+\cdots+99=4953$ 이므로, $a_n\ge n-1$에 대하여 하나의 n을 제외하고 등호가 성립해야 한다. $n<100$일 때 $a_n\ge n$이면, $a_{n+1}\ge a_n+1=n+1$가 되어 전체 공의 개수는 4955 이상이라 모순이다. 따라서 $a_{100}=100$이고, $n\le 99$ 이면 $a_n=n-1$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\left(\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}=\sum_{n=1}^{98}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}$$
$$=\sqrt{98}+\frac{10-\sqrt{98}}{2}=5+\frac{\sqrt{98}}{2}$$

이다.

한편 빨간 공의 개수가 $2=1+1$개이므로 두 번째 시행에서 반드시 빨간 공을 꺼내야 한다. 즉, 파란 공을 11개를 꺼내는 방법은 1을 사용하지 않아야 하므로, 11을 뽑는 방법은 아래와 같다.

- 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 (11개)
- 1번째 시행과 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+11=11$개)
- 1번째, 3번째, 10번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+9=11$개)
- 1번째, 3번째, 4번째, 7번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+3+6=11$개)
- 1번째, 3번째, 5번째, 6번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+4+5=11$개)

따라서, $m=1, 2, 3, 4$가 가능하다. 공을 다섯 번 꺼내면 파란 공은 최소한 $1+(0+2+3+4+5)=15$개 이상이므로, $m\ge 5$에서는 성립하지 않는다.

2021학년도 논술고사

자연계열(오후)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 :7

[문제 1-1] (15점)

(1) (7점) 두 함수 $f(x)=x^2-3x-6$과 $g(x)=x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^2-3a-6=a^3-4a+c$ 이고 $2a-3=3a^2-4$이다.

이를 풀면 $2a-3=3a^2-4$로부터, $3a^2-2a-1=(3a+1)(a-1)=0$ 이 되고 a는 정수가 아니므로 $a=-\dfrac{1}{3}$이다. (3점)

$a^2-3a-6=a^3-4a+c$에 $a=-\dfrac{1}{3}$을 대입하면 $\dfrac{1}{9}+1-6=-\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{3}+c$이므로 $27c=-167$이다. (4점)

(2) (8점) $f(x)$과 $g(x)$가 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다.

$f'(a)=g'(a)$이므로 $4a^3-4a-2=3a-5$로부터, $4a^3-7a+3=(a-1)(2a-1)(2a+3)=0$이고

가능한 a의 값은 1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{3}{2}$ 이다.

이 중 $f(a)=g(a)$를 만족하는 것을 찾으면 $a=1$ 이다. (4점)

따라서 $h(x)$는 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=1$에서 갈아타는 함수이고, 주어진 식을 계산하면 아래와 같다.

$$\int_0^2 h(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^2 \quad (4점)$$
$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)+\left(4-10+1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{149}{30}$$

[문제 1-2] (15점)

(1) (7점) $y=2^x$와 $x=n$에서 부드럽게 만나는 직선은 $x=n$에서의 접선이다.

$f'(n)=2^n\ln 2$이고 점 $(n,2^n)$을 지나므로 접선의 방정식은 $y-2^n=2^n\ln 2(x-n)$가 되어

$a_n=\ln 2\,(e^{n\ln 2})=2^n\ln 2$ 이고 $b_n=2^n-n2^n\ln 2$가 된다. (4점)

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{\ln 2}-n\right)=\frac{100}{\ln 2}-5050$ 이다. (3점)

(2) (8점) $g(x)=px^2+qx+r$이라 하자. $g(0)=f(0)$로부터 $r=1$이고 $g'(0)=f'(0)$로부터 $q=1$이다.

$g(2)=f(2)$로부터 $p=\dfrac{e^2-3}{4}$이므로 $g(x)=\dfrac{e^2-3}{4}x^2+x+1$이다. (3점)

함수 $y=f(x)$의 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^2$이고, 함수 $y=g(x)$의 점 P에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=e^2-2$이고, (2점)

θ는 예각이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\tan\theta=\dfrac{e^2-(e^2-2)}{1+e^2(e^2-2)}=\dfrac{2}{(e^2-1)^2}$ 이다. (3점)

[문제 1-3] (20점)

(1) (9점) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + b$와 $g(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 4x + c$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로

$f(a) = g(a)$이고 $f'(a) = g'(a)$이다.

$f'(a) = g'(a)$이므로 $-4a^3 - 4a = -4a^2 - 4$가 되고 $a = 1$이다. (2점)

한편, $g(x)$는 $x \geq 1$에서 감소하므로 $h(x)$의 최댓값은 구간 $(-\infty, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값이며,

이는 $f(x)$의 극댓값 혹은 $f(1)$이다.

$f'(x) = -4(x^2+1)x = 0$ 의 실수해는 $x = 0$이므로 $f(0)$와 $f(1)$의 값을 비교하면

$f(0) = b$이고 $f(1) = b - 6$이므로 b 최댓값이다. 즉, $b = 20$이다. (4점)

$f(1) = g(1)$로부터, $-3 + b = -\frac{16}{3} + c$이고 $c = 17 + \frac{16}{3}$이다.

따라서 $3(a+b+c) = 3\left(1 + 20 + 17 + \frac{16}{3}\right) = 130$ 이다. (3점)

(2) (11점) 두 함수가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로, $f(a) = g(a)$이고 $a \neq \frac{\pi}{2}$이며, $f'(a) = g'(a)$이다.

$f(a) = g(a)$로부터, $d = -\sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right|$가 된다.

$f(x)$에서 $g(x)$로 $x = a$에서 갈아타는 함수의 최댓값은 $d+1$ 혹은 0이다.

따라서 $1 + d > 0$인 d의 존재여부와 존재하는 경우 그 최댓값을 살펴보면 된다. (3점)

$\left|a - \frac{\pi}{2}\right| \geq 2$이면 $1 + d = 1 - \sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right| \leq 0$ 이다. $\left|a - \frac{\pi}{2}\right| < 2$이라 가정하자.

먼저 $a \leq \frac{\pi}{2}$라 하자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = 1$이므로 $a = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ (k는 정수)

꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{\pi}{6}$뿐이다.

이때 $d + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left|\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right| + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + 1 < 0$ 이다. (3점)

$a > \frac{\pi}{2}$이고 $\left|a - \frac{\pi}{2}\right| < 2$라 하자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = -1$이므로 $a = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ (단, k는 정수)이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{2\pi}{3}$ 뿐이다.

이때 $d + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + 1 > 0$이다.

따라서 M이 최대가 되는 경우는 $a = \frac{2\pi}{3}$이고 $d = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$일 때이다. (5점)

[문제 2-1] (21점)

(1) (6점) 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 경우를 나눠서 계산하자.

첫 번째 공이 빨간 공인 경우의 확률은 $\frac{r}{r+b}\times\frac{r+1}{r+b+1}$이고, (2점)

첫 번째 공이 파란 공인 경우의 확률은 $\frac{b}{r+b}\times\frac{r}{r+b+1}$이다. (2점)

즉 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률은 $\frac{r(r+1)+br}{(r+b)(r+b+1)}=\frac{r}{r+b}$이다. (2점)

(2) (7점) 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 경우는 모두 4가지이다. 빨간 공을 꺼내는 시행을 R, 파란 공을 꺼내는 시행을 B이라 하고 각 경우의 확률을 구하면 아래와 같다.

R-R-R : $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{60}$ ⋯ ① (1점)

B-R-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ② (1점)

R-B-R : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ③ (1점)

B-B-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{60}$ ⋯ ④ (1점)

따라서 조건부확률은 $\frac{①+②}{①+②+③+④}=\frac{24+6}{24+6+6+4}=\frac{3}{4}$이다. (3점)

(3) (8점) 2021회 시행 직후 공의 수는 2024개이고 빨간 공과 파란 공의 개수가 1012개로 같아야 하므로 빨간 공은 1010번, 파란 공은 1011번 꺼내져야 한다. (2점)

이렇게 공을 꺼내는 각 경우의 확률이 모두 $\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$와 같으므로 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률은

$${}_{2021}\mathrm{C}_{1010}\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$$ 이다. (3점)

따라서 $\frac{2021!}{1010!\times1011!}\cdot\frac{2\times(1011!)^2}{2023!}=\frac{2\times1011}{2022\times2023}=\frac{1}{2023}$ 가 된다. (3점)

[문제 2-2] (29점)

(1) (9점) 각 시행에서 꺼낸 공을 흰 공인 경우(W)와 흰 공이 아닐 경우(C)로 나누자. 각 경우의 확률과 X, X^2을 각각 구하면 아래와 같다.

C-C : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=2$, $X^2=4$

W-C : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=3$, $X^2=9$

C-W : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=4$, $X^2=16$

W-W : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=5$, $X^2=25$

즉, $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}$ (4점)

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{137}{10}$이다. 따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{29}{20}$이다. (5점)

(2) (9점) $3+a_1+\cdots+a_n=3^n+2$이므로 $a_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$이다. (2점)

$2\cdot 3^6>546$이므로 $547-1=546$은 $2\cdot 3^0, 2\cdot 3^1, \ldots, 2\cdot 3^5$의 조합만으로 이루어져야 한다. 한편, 그러한 조합은 $547=1+2(3+3^3+3^5)$으로 유일함을 알 수 있다. 즉, 흰 공은 2, 4, 6번째 뽑혔다. (4점)
따라서 4번째 시행 직후 흰 공의 개수는 $1+6+54=61$ 개다. (3점)

(3) (11점) 수열 $\{a_n\}$이 모든 n에 대해 $a_n\geq 0$, $a_{n+1}>a_n$이므로 $a_n\geq n-1$이다.
$2+12+4940=4954=3+a_1+a_2+\cdots+a_{100}\geq 3+0+1+\cdots+99=4953$ 이므로, $a_n\geq n-1$에 대하여 하나의 n을 제외하고 등호가 성립해야 한다. $n<100$일 때 $a_n\geq n$이면, $a_{n+1}\geq a_n+1=n+1$가 되어 전체 공의 개수는 4955 이상이라 모순이다. 따라서 $a_{100}=100$이고, $n\leq 99$ 이면 $a_n=n-1$이다. (5점)
따라서,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}&=\left(\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}=\sum_{n=1}^{98}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}\\&=\sqrt{98}+\frac{10-\sqrt{98}}{2}=5+\frac{\sqrt{98}}{2}\ \text{(2점)}\end{aligned}$$

이다.
한편 빨간 공의 개수가 $2=1+1$개이므로 두 번째 시행에서 반드시 빨간 공을 꺼내야 한다. 즉, 파란 공을 11개를 꺼내는 방법은 1을 사용하지 않아야 하므로, 11을 뽑는 방법은 아래와 같다.

- 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 (11개)
- 1번째 시행과 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+11=11$개$)$
- 1번째, 3번째, 10번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+9=11$개$)$
- 1번째, 3번째, 4번째, 7번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+3+6=11$개$)$
- 1번째, 3번째, 5번째, 6번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+4+5=11$개$)$

따라서, $m=1, 2, 3, 4$가 가능하다. (2점)
공을 다섯 번 꺼내면 파란 공은 최소한 $1+(0+2+3+4+5)=15$개 이상이므로, $m\geq 5$에서는 성립하지 않는다. (2점)

2021학년도 논술고사

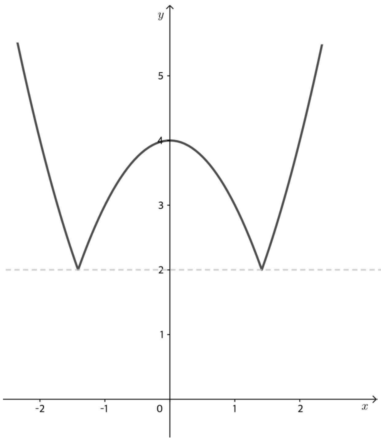
자연계열
(저녁, 의학과 제외)

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

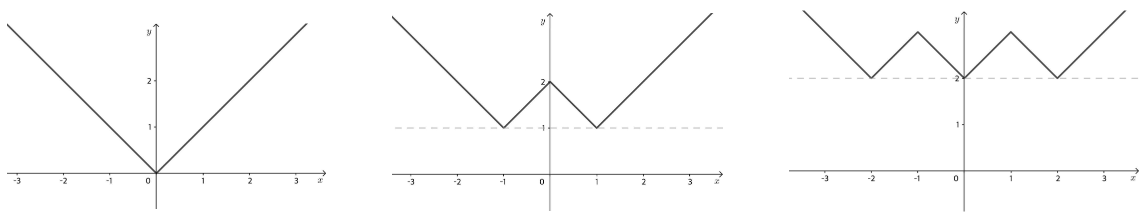
[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 함수 $f(x)$에 대하여 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그릴 수 있다. 이것은 $y=0$에서 $y=f(x)$의 그래프를 접어 올려 그린 것으로 볼 수 있다. 일반적으로, 실수 b에 대하여, $y=|f(x)-b|+b$ 의 그래프는 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하여 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동하고 다시 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 그릴 수 있는데, 이 또한 $y=b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 접어 올려 그린 것으로 볼 수 있다. 이러한 이유로, 함수 $y=|f(x)-b|+b$ 를 $y=b$에서 $y=f(x)$를 '<u>접어 올린 함수</u>'라 하자. [그림 1-1]은 $y=2$에서 $y=x^2$을 접어 올린 함수의 그래프이다.



[그림 1-1]

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 음이 아닌 정수 n에 대하여 $y=0,\ \ldots,\ y=n$에서 차례로 연이어 접어 올린 함수의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 x 좌표의 집합을 S_n이라 하자. 예를 들어, $f(x)=x$이면, $y=0$, $y=1$, $y=2$에서 순서대로 접어 올린 함수의 그래프는 [그림 1-2]와 같으므로 $S_0=\{0\}$, $S_1=\{-1,1\}$, $S_2=\{-2,0,2\}$이다.



[그림 1-2]

[문제 1-1] (35점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$는 이차함수 $y=(x-2)^2$을 $y=1$에서 접어 올린 함수이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 정확히 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하여라.

(2) 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x-4$의 그래프의 변곡점 (a,b)를 생각하자. 함수 $g(x)$는 $y=f(x)$를 $y=b$에서 접어 올린 함수이다. 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 극대가 되고 $x=q$에서 극소가 되도록 하는 모든 p와 q의 값을 구하여라.

(3) 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올린 함수이고, 함수 $h(x)$는 $y=f'(x)$를 $y=1$에서 접어 올린 함수이다. $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능 할 때, 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=h(x)$의 교점의 개수를 구하여라.

(4) 양의 실수 a에 대하여, 함수 $f(x)$는 $y=a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$를 $y=0$에서 접어 올린 함수이다. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{4}{\pi}$일 때 a의 값을 구하여라.

[문제 1-2] (15점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $f(x)=(x-7)^2$에 대하여 집합 S_{10}의 원소의 개수를 a라 하고 S_{10}의 모든 원소의 합을 b라 하자. a와 b의 값을 각각 구하여라.

(2) $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln 3x$와 음이 아닌 정수 n에 대하여 S_n의 모든 원소의 곱을 p_n이라 할 때, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$을 구하여라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 검은 바둑돌을 이동시키거나 버리는 것을 1회의 시행이라 하자.

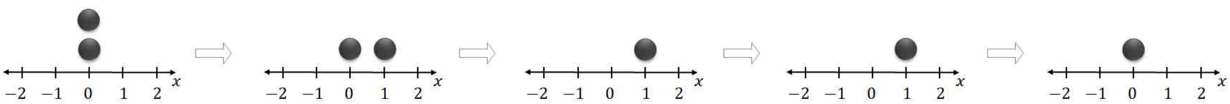
<검은 바둑돌의 규칙>

㉠ 눈의 수가 1 또는 4이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 $x=1$의 위치로 이동시킨다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉡ 눈의 수가 2 또는 5이면, $x=1$의 위치에 있는 검은 바둑돌 1개를 원점으로 이동시킨다. $x=1$의 위치에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉢ 눈의 수가 3 또는 6이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 버린다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

예를 들어, 검은 바둑돌 2개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 순서대로 시행한 규칙은 ㉠-㉢-㉠-㉡이 되어 검은 바둑돌의 배치는 [그림 2-1]과 같이 변한다.



[그림 2-1]

(나) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 검은 바둑돌을 제시문 (가)의 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키거나 버리고, 흰 바둑돌을 <흰 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키는 것을 1회의 시행이라 하자.

<흰 바둑돌의 규칙>

Ⓐ 눈의 수가 짝수이면 흰 바둑돌을 양의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.
Ⓑ 눈의 수가 홀수이면 흰 바둑돌을 음의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.

예를 들어 검은 바둑돌 2개, 흰 바둑돌 1개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 검은 바둑돌 1개가 원점에 있고 흰 바둑돌은 $x=2$의 위치에 있다.

[문제 2-1] (24점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 3회 시행 직후 검은 바둑돌이 수직선 위에 남아 있지 않을 확률을 p 라 할 때, $\log p$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.47$, $\log 7 = 0.84$로 계산한다.)

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 12회 시행을 하였을 때, 2, 4, 6, 8, 10, 12번째 시행 직후마다 검은 바둑돌이 원점에 있지 않는 사건을 A라 하고, 12번째 시행 직후 수직선 위에 검은 바둑돌이 남아 있는 사건을 B라 하자. 이때 $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) < \frac{3}{92}$임을 증명하여라. (단, $\left(\frac{5}{9}\right)^5 < \frac{19}{359}$를 증명 없이 이용할 수 있다.)

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 2개가 놓여 있고 3회 시행을 하였다. 수직선 위에 남아 있는 검은 바둑돌의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$를 구하여라.

[문제 2-2] (26점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 양의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 흰 바둑돌이 $x = k$의 위치에 있을 확률을 p_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} k^2 (p_k + p_{-k})$의 값을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 3 이상의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 바둑돌 배치로 가능한 경우의 수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있고, 13회 시행을 하여 나온 주사위의 눈의 수를 순서대로 $x_1, \ldots, x_{13}$ 이라 하자. 다음 <조건>을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \ldots, x_{13})$ 의 개수를 구하여라.

< 조 건 >

① 첫 12회 시행을 하는 동안 모든 주사위의 눈이 정확히 두 번씩 나왔다.
② 13번째 시행을 마친 직후에는 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌이 모두 $x = 1$의 위치에 있다.

2021학년도 논술고사

자연계열 (저녁, 의학과 제외) 모범답안

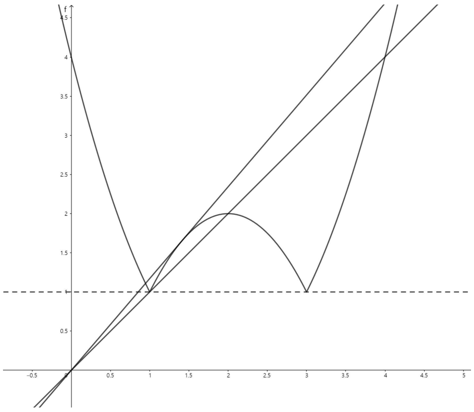
표지를 제외한 페이지 수 : 6

2021학년도 자연계열(저녁) 모범답안

자연계열(저녁)
(의학과 제외)

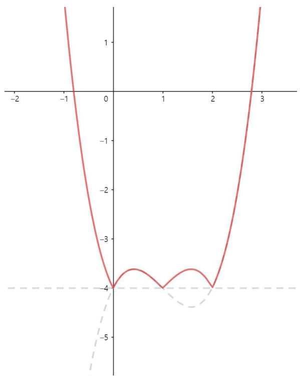
[문제 1-1]

(1) $y=f(x)$와 $y=kx$가 세 점에서 만나려면 아래 그림과 같이, $y=kx$가 $(1,1)$을 지나거나 $y=kx$가 $y=f(x)$와 접해야 한다. $y=kx$가 $(1,1)$을 지나는 경우 $k=1$이다.



$y=kx$와 $y=f(x)$가 $x=a$에서 접하는 경우를 생각하면, $1 \le a \le 3$가 되고, $f(x)=2-(x-2)^2$가 되므로 $f'(a)=-2(a-2)$이다. 따라서 $k=-2(a-2)$가 되어 접점의 y좌표는 $-2a(a-2)$이다. 한편 접점의 y좌표는 $f(a)$이므로, $-2a(a-2)=2-(a-2)^2$가 성립한다. 이를 정리하면, $a^2=2$이고 $1 \le a \le 3$이므로 $a=\sqrt{2}$이다. 따라서 $k=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$이다.
따라서 가능한 k는 $k=1, 4-2\sqrt{2}$이다.

(2) $f'(x)=3x^2-6x+2$이고 $f''(x)=6x-6$이므로, 변곡점의 좌표는 $(1,-4)$이다. 따라서 $g(x)$는 $x^3-3x^2+2x-4=-4$의 세 근 $x=0,1,2$에서 극솟값을 가진다. 또한, $f'(x)=3x^2-6x+2=0$의 두 근 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 가지므로, $p=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $q=0,1,2$ 이다.

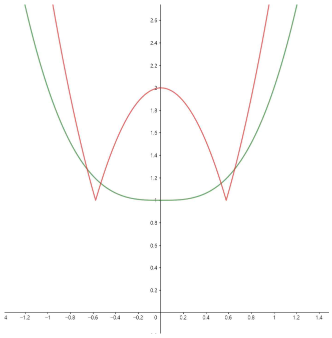


(3) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올렸더니 미분가능한 함수의 그래프가 되었으므로, $f(a)=1$인 모든 a에 대하여, $f'(a)=0$이어야 한다. 그런데 $x=a$에서 함수가 극댓값을 가지거나 극솟값을 가지면, 삼차함수 그래프의 개형으로부터 $g(x)$가 미분 불가능한 점이 항상 존재한다. 따라서 $x=a$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 가지므로 $f(x)=(x-a)^3+1$이다.

교점을 구하기 위해서 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동 시켜 생각하면 $a=0$일 때만 구하면 충분하다. $g(x)=|x|^3+1$과 $h(x)=|3x^2-1|+1$은 둘 다 y축 대칭이므로, $x>0$일 때의 교점의 개수를 구하면 된다.

① $x<\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g(x)$는 증가하고 $h(x)$는 감소한다. $g(0)-h(0)<0$이고 $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$이므로 $g(x)-h(x)=0$이 되는 점이 하나 존재하므로, $g(x)$와 $h(x)$는 한 점에서 만난다.

② $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$, $g(1)-h(1)<0$, $g(3)-h(3)>0$ 이므로, 사잇값 정리에 의해 한 근은 구간 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$에, 다른 근은 구간 $(1,3)$에 존재한다. 두 근 모두 $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로, 두 점에서 만난다. 그래프 $g(x)$와 $h(x)$의 개형으로부터, $x>0$인 근은 두 개 뿐이다.



따라서 $x>0$에서 교점은 세 개이고, 대칭성에 의해 모두 6개의 교점이 있다.

(4) $y=a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$는 원점 대칭인 함수이므로 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다. 즉, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$이고, 구간 $[0,1]$에서 $\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)\geq 0$이므로, $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx$이다. 한편,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx &= \int_0^1 \left(\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right)\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^1+\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1\\ &= \frac{2}{\pi}(1-\ln 2)\end{aligned}$$

이므로, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2a\cdot\frac{2}{\pi}(1-\ln 2)=\frac{4}{\pi}$ 이고, $a=\frac{1}{1-\ln 2}$이다.

[문제 1-2]

(1) 먼저, S_0, S_1의 원소의 개수가 각각 1, 2이다. 또한 $k \geq 2$에 대하여 S_k는 S_{k-2}와 $\{x \mid |f(x)| = k\}$의 합집합이고 그래프의 개형으로부터 S_k의 원소의 개수는 $k+1$ 임을 알 수 있다. S_k의 원소 s에 대하여 $14-s$도 S_k의 원소이므로 원소의 합은 $7k$이다. 따라서 $a = 1+2 \cdot 5 = 11$이며, $b = 7a = 77$이다.

(2) 먼저 $S_0 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$이고, $\ln 3x = \pm 1$으로부터 $S_1 = \left\{\frac{e}{3}, \frac{e^{-1}}{3}\right\}$이다. 따라서 $p_0 = \frac{1}{3}$이고 $p_1 = \frac{1}{9}$이다. $n \geq 2$일 때 그래프의 개형으로부터 $S_n = S_{n-2} \cup \{x \mid \ln 3x = \pm n\} = S_{n-2} \cup \left\{\frac{e^n}{3}, \frac{e^{-n}}{3}\right\}$가 되므로 $p_n = p_{n-2} \times \frac{1}{9}$이다. 따라서 $p_n = \frac{1}{3} p_{n-1}$이 되고, 구하고자 하는 값은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수와 같으므로 값은 $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ 이다.

[문제 2-1]

(1) 검은 바둑돌이 k번째 시행에서 규칙 ⓒ에 의해 버려질 확률을 구하자.

$k=1$: 처음 시행에서 규칙 ⓒ의 경우가 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$k=2$: 처음 두 시행에서 ⓛ-ⓒ이 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$이다.

$k=3$: 세 번의 시행동안 가능한 경우는 ⓛ-ⓛ-ⓒ 혹은 ㉠-ⓛ-ⓒ 의 경우이므로 구하는 확률은 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$이다.

따라서 검은 바둑돌이 3회 시행 직후 수직선에 남아 있지 않을 확률은 $p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$이고,

$\log p=\log 2+\log 7-3\log 3=0.30+0.84-1.41=-0.27$이다.

(2) $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$와 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 각각 구하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 먼저 계산하자. 사건 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$은 12회 시행하는 동안 $2k$번째 시행 직후 ($k=1,2,\ldots,6$) 검은 바둑돌은 $x=1$의 위치에 있어야 한다. 처음 검은 바둑돌의 위치는 원점이므로 두 번째 시행 직후에 검은 바둑돌이 $x=1$의 위치에 있기 위해서는 시행된 규칙은 ㉠-㉠의 경우, ㉠-ⓒ의 경우, ⓛ-㉠의 경우로 총 3가지 경우가 있다. 이제 두 번의 시행을 더 했을 때 여전히 $x=1$의 위치에 있으려면 차례로 시행된 규칙은 아래의 5가지 중 하나이다.

㉠-㉠, ㉠-ⓒ, ⓛ-㉠, ⓒ-㉠, ⓒ-ⓒ

따라서 12회의 시행을 마치기까지 이렇게 5번을 시행해야 하므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$이다.

이제 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$를 구하자. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)$을 구하면 된다.

바둑돌이 $2k+1$ 번째 혹은 $2k+2$ 번째에서 버려지는 확률을 구하자.

$k=0$일 때 : 첫 번째 혹은 두 번째 시행에서 버려져야 하므로, 첫 시행에서 규칙 ⓒ의 경우이거나 두 번째 시행까지 차례로 ⓛ-ⓒ의 경우가 된다. 따라서 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$이다.

$k>0$일 때 : $2k$번째 까지는 검은 바둑돌이 남아 있어야 하므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 구하는 같이 구할 수 있으므로 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이고, $2k+1$ 혹은 $2k+2$번째에서 버려지는 경우는 규칙 ⓛ-ⓒ이 차례대로 나오는 경우 밖에 없으므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이다.

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$이다. 이제 $\frac{5^5}{9^5}=\alpha$라 하고, 조건부 확률을 구하면

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)}=\frac{\frac{\alpha}{3}}{\frac{\alpha}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}(1-\alpha)}=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}\text{이다.}$$

한편, $359\alpha<19$ 이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}<\frac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha}=\frac{3}{92}$이다.

(3) 총 27 가지의 경우 중 각 X에 대하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

$X=0$인 경우 : ㉢ - ㉢ - $*$, ㉢ - ㉡ - ㉢, ㉡ - ㉢ - ㉢ 으로 모두 5가지.

$X=2$인 경우 : ㉠ - ㉠ - ㉢, ㉢이 나오지 않는 경우로 총 $1+8=9$가지.

$X=1$인 경우 : 나머지 27개에 대한 나머지 경우 13가지

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{27}+1\times\frac{13}{27}+2\times\frac{9}{27}=\frac{31}{27}$이다.

분산을 구해보면 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{49}{27}-\frac{31^2}{27^2}=\frac{7^2\times3^3-31^2}{27^2}$이다.

따라서 $\sigma(X)=\frac{\sqrt{362}}{27}$ 이다.

[문제 2-2]

(1) 홀수가 m번 (단, $2m \le n$) 나온다고 하면 흰 바둑돌의 위치는 $k=n-2m$ 이며, 홀수가 $n-m$ 번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $-k$이다. $\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n}(-k)^2 p_{-k}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n}(n-2m)^2 \frac{{}_nC_m}{2^n}$$

한편, n번의 시행에서 주사위의 눈의 수가 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$를 따르므로 이항분포의 평균과 분산으로부터 $E(X)$와 $V(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{n}{2} = 0 \times {}_nC_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \times {}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n \times {}_nC_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V(X) = \frac{n}{4} = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 0^2 \times {}_nC_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^2 \times {}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n^2 \times {}_nC_n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

이로부터 $E(X^2) = \frac{n^2+n}{4}$임을 확인 할 수 있다.

$$(\text{준식}) = n^2 - 4nE(X) + 4E(X^2) = n^2 - 2n^2 + n + n^2 = n \text{ 이다.}$$

(2) 검은 바둑돌은 원점 혹은 $x=1$위에 있어야 하고 최대 3개까지 있을 수 있다. 원점의 검은 바둑돌의 개수를 a, $x=1$위의 검은 바둑돌의 개수를 b라고 하면 가능한 (a, b)는 $a+b \le 3$이 되는 음이 아닌 정수의 순서쌍이 되므로, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$으로 모두 10개이다. 또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다.

한편 검은 바둑돌이 규칙 ㉠을 따라 움직이는 사건을 A라 하고 흰 바둑돌이 규칙 Ⓐ을 따라 움직이는 사건을 B라 하면, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$이므로 두 사건은 독립이다.

비슷하게 하면, 검은 바둑돌의 규칙 중 ㉠, ㉡, ㉢ 하나가 일어나는 사건과 흰 바둑돌의 규칙 중 Ⓐ와 Ⓑ가 일어나는 사건은 독립이다. 따라서 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 움직임은 서로 독립적이므로 전체 경우의 수는 $10(n+1)$가지이다.

(3) 먼저 흰 바둑돌의 위치는 주사위의 눈의 순서에 상관없이 그 횟수에 의해서만 결정되므로 조건 ①에 의해 12회 시행 직후에 흰 바둑돌은 원점에 있고 조건 ②에 의하여 x_{13}은 $2, 4, 6$중에 하나가 되어야 한다. 조건 ①로부터 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉠, ㉡, ㉢의 경우가 각각 네 번씩 일어났다는 것을 알 수 있고, 13회 시행까지 검은 바둑돌이 버려지지 않고 모두 남아 있으므로 규칙 ㉢의 경우가 되는 시행의 직전에 원점에 검은 바둑돌이 있으면 안된다. 따라서 ㉢이 시행되기 전에 검은 바둑돌 4개를 $x=1$의 위치로 옮기는 시행 (㉠)이 모두 일어나야 한다. 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉡이 ㉢과 ㉠ 사이에 일어나게 되면 검은 바둑돌을 버리게 되므로, 12회까지 가능한 경우는 아래 두 가지 중 하나이다.

(i) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡

검은 바둑돌 1개가 12회 시행 직후에 원점의 위치에 있으므로, ㉠의 경우가 일어나는 $x_{13}=4$ 이다.

(ii) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢

검은 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있으므로, ㉠, ㉢의 경우가 일어나는 $x_{13}=4$ 또는 $x_{13}=6$이다.

즉 ㉠의 자리에는 1,1,4,4, ㉡ 의 자리에는 2, 2, 5, 5, ㉢의 자리에는 3, 3, 6, 6이 있어야 한다. a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 개수는 6이므로, 각 경우 6^3가지이고, 구하고자 하는 답은 $3 \cdot 6^3 = 648$ 이다.

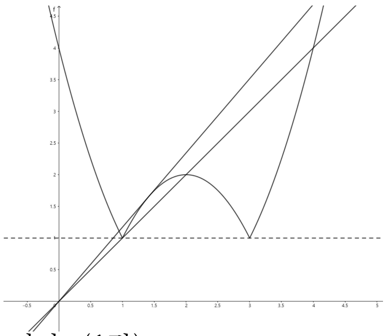
2021학년도 논술고사

자연계열
(저녁, 의학과 제외)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 :

[문제 1-1] (35점)

(1) (8점) $y=f(x)$와 $y=kx$가 세 점에서 만나려면 아래 그림과 같이, $y=kx$가 $(1,1)$을 지나거나 $y=kx$가 $y=f(x)$와 접해야 한다. (3점)



$y=kx$가 $(1,1)$을 지나는 경우 $k=1$이다. (1점)

$y=kx$와 $y=f(x)$가 $x=a$에서 접하는 경우를 생각하면, $1 \le a \le 3$가 되고, $f(x)=2-(x-2)^2$가 되므로 $f'(a)=-2(a-2)$이다. 따라서 $k=-2(a-2)$가 되어 접점의 y좌표는 $-2a(a-2)$이다. 한편 접점의 y좌표는 $f(a)$이므로, $-2a(a-2)=2-(a-2)^2$가 성립한다. 이를 정리하면, $a^2=2$이고 $1 \le a \le 3$이므로 $a=\sqrt{2}$이다. 따라서 $k=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$이다. (4점)

따라서 가능한 k는 $k=1, 4-2\sqrt{2}$이다.

(2) (7점) $f'(x)=3x^2-6x+2$이고 $f''(x)=6x-6$이므로, 변곡점의 좌표는 $(1,-4)$이다. (2점)

따라서 $g(x)$는$x^3-3x^2+2x-4=-4$의 세 근 $x=0,1,2$에서 극솟값을 가진다. (2점)

또한, $f'(x)=3x^2-6x+2=0$의 두 근 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 가지므로 (3점)

$p=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $q=0,1,2$ 이다.

(3) (10점) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올렸더니 미분가능한 함수의 그래프가 되었으므로, $f(a)=1$인 모든 a에 대하여, $f'(a)=0$이어야 한다. 그런데 $x=a$에서 함수가 극댓값을 가지거나 극솟값을 가지면, 삼차함수 그래프의 개형으로부터 $g(x)$가 미분 불가능한 점이 항상 존재한다. 따라서 $x=a$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 가지므로 $f(x)=(x-a)^3+1$이다. (4점)

교점을 구하기 위해서 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동 시켜 생각하면 $a=0$일 때만 구하면 충분하다. $g(x)=|x|^3+1$과 $h(x)=|3x^2-1|+1$은 둘 다 y축 대칭이므로, $x>0$일 때의 교점의 개수를 구하면 된다.

① $x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g(x)$는 증가하고 $h(x)$는 감소한다. $g(0)-h(0)<0$이고 $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$이므로 $g(x)-h(x)=0$이 되는 점이 하나 존재하므로, $g(x)$와 $h(x)$는 한 점에서 만난다. (2점)

② $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$, $g(1)-h(1)<0$, $g(3)-h(3)>0$ 이므로, 사잇값 정리에 의해 한 근은 구간 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},1\right)$에, 다른 근은 구간 $(1,3)$에 존재한다. 두 근 모두 $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로, 두 점에서 만난다. 그래프 $g(x)$와 $h(x)$의 개형으로부터, $x>0$인 근은 두 개 뿐이다. (2점)

따라서 $x>0$에서 교점은 세 개이고, 대칭성에 의해 모두 6개의 교점이 있다. (2점)

(4) (10점) $y = a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$는 원점 대칭인 함수이므로 $y = f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다. 즉, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right) \geq 0$이므로, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx$이다. 한편,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx &= \int_0^1 \left(\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1\right)\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^1 + \frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1 \quad (5\text{점}) \\ &= \frac{2}{\pi}(1 - \ln 2)\end{aligned}$$

이므로, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2a \cdot \frac{2}{\pi}(1-\ln 2) = \frac{4}{\pi}$ 이고, $a = \frac{1}{1-\ln 2}$이다. (5점)

[문제 1-2] (15점)

(1) (6점) 먼저, S_0, S_1의 원소의 개수가 각각 1, 2이다. 또한 $k \geq 2$에 대하여 S_k는 S_{k-2}와 $\{x \mid |f(x)| = k\}$의 합집합이고 그래프의 개형으로부터 S_k의 원소의 개수는 $k+1$ 임을 알 수 있다. S_k의 원소 s에 대하여 $14-s$도 S_k의 원소이므로 원소의 합은 $7k$이다. 따라서

$a = 1 + 2 \cdot 5 = 11$ (3점)

$b = 7a = 77$ (3점)

(2) (9점) 먼저 $S_0 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$이고, $\ln 3x = \pm 1$으로부터 $S_1 = \left\{\frac{e}{3}, \frac{e^{-1}}{3}\right\}$이다. 따라서 $p_0 = \frac{1}{3}$이고 $p_1 = \frac{1}{9}$이다.

$n \geq 2$일 때 그래프의 개형으로부터 $S_n = S_{n-2} \cup \{x \mid \ln 3x = \pm n\} = S_{n-2} \cup \left\{\frac{e^n}{3}, \frac{e^{-n}}{3}\right\}$가 되므로

$p_n = p_{n-2} \times \frac{1}{9}$이다. (4점)

따라서 $p_n = \frac{1}{3} p_{n-1}$이 되고, 구하고자 하는 값은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수와 같으므로 (3점)

구하고자 하는 값은 $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ 이다. (2점)

[문제 2-1] (24점)

(1) (6점) 검은 바둑돌이 k번째 시행에서 규칙 ㉢에 의해 버려질 확률을 구하자.

$k=1$: 처음 시행에서 규칙 ㉢의 경우가 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$k=2$: 처음 두 시행에서 ㉡ - ㉢이 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$이다.

$k=3$: 세 번의 시행동안 가능한 경우는 ㉡ - ㉡ - ㉢ 혹은 ㉠ - ㉡ - ㉢ 의 경우이므로 구하는 확률은 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$이다.(3점)

따라서 검은 바둑돌이 3회 시행 직후 수직선에 남아 있지 않을 확률은 $p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$이고, (1점)

$\log p=\log 2+\log 7-3\log 3=0.30+0.84-1.41=-0.27$이다. (2점)

(2) (10점) $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$와 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 각각 구하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 먼저 계산하자. 사건 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$은 12회 시행하는 동안 $2k$번째 시행 직후 $(k=1,2,\ldots,6)$ 검은 바둑돌은 $x=1$의 위치에 있어야 한다.

처음 검은 바둑돌의 위치는 원점이므로 두 번째 시행 직후에 검은 바둑돌이 $x=1$의 위치에 있기 위해서는 시행된 규칙은 ㉠ - ㉠의 경우, ㉠ - ㉢ 의 경우, ㉡ - ㉠의 경우로 총 3가지 경우가 있다. 이제 두 번의 시행을 더 했을 때 여전히 $x=1$의 위치에 있으려면 차례로 시행된 규칙은 아래의 5가지 중 하나이다.

㉠ - ㉠, ㉠ - ㉢, ㉡ - ㉠, ㉢ - ㉠, ㉢ - ㉢

따라서 12회의 시행을 마치기까지 이렇게 5번을 시행해야 하므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$이다. (3점)

이제 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$를 구하자. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})$을 구하면 된다.
바둑돌이 $2k+1$ 번째 혹은 $2k+2$ 번째에서 버려지는 확률을 구하자.
$k=0$일 때 : 첫 번째 혹은 두 번째 시행에서 버려져야 하므로, 첫 시행에서 규칙 ㉢의 경우이거나 두 번째 시행까지 차례로 ㉡ - ㉢의 경우가 된다. 따라서 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$이다.

$k>0$일 때 : $2k$번째 까지는 검은 바둑돌이 남아 있어야 하므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 구하는 같이 구할 수 있으므로 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이고, $2k+1$ 혹은 $2k+2$번째에서 버려지는 경우는 규칙 ㉡ - ㉢ 이 차례대로 나오는 경우 밖에 없으므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이다.

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$이다. (3점)

이제 $\frac{5^5}{9^5}=\alpha$라 하고, 조건부 확률을 구하면

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})}=\frac{\frac{\alpha}{3}}{\frac{\alpha}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}(1-\alpha)}=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}$$ 이다. (2점)

한편, $359\alpha < 19$ 이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \dfrac{12\alpha}{9\alpha+19} < \dfrac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha} = \dfrac{3}{92}$ 이다. (2점)

(3) (8점) 총 27 가지의 경우 중 각 X에 대하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

$X=0$인 경우 : ㉢ - ㉢ - *, ㉢ - ㉡ - ㉢, ㉡ - ㉢ - ㉢ 으로 모두 5가지. (1점)

$X=2$인 경우 : ㉠ - ㉠ - ㉢, ㉢이 나오지 않는 경우로 총 $1+8=9$가지. (1점)

$X=1$인 경우 : 나머지 27개에 대한 나머지 경우 13가지 (1점)

따라서 $\mathrm{E}(X) = 0\times\dfrac{5}{27} + 1\times\dfrac{13}{27} + 2\times\dfrac{9}{27} = \dfrac{31}{27}$ 이다. (2점)

분산을 구해보면 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \dfrac{49}{27} - \dfrac{31^2}{27^2} = \dfrac{7^2\times 3^3 - 31^2}{27^2}$ 이다.

따라서 $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{362}}{27}$ 이다. (3점)

[문제 2-2] (26점)

(1) (8점) 홀수가 m번 (단, $2m \le n$) 나온다고 하면 흰 바둑돌의 위치는 $k = n-2m$ 이며, 홀수가 $n-m$ 번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $-k$이다. (2점)

$\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k + p_{-k}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n} (-k)^2 p_{-k}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k + p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n} (n-2m)^2 \frac{{}_n\mathrm{C}_m}{2^n}$ (2점)

한편, n번의 시행에서 주사위의 눈의 수가 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$를 따르므로 이항분포의 평균과 분산으로부터 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다. (2점)

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{2} = 0 \times {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \times {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n \times {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{n}{4} = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 0^2 \times {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^2 \times {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n^2 \times {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

이로부터 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{n^2+n}{4}$ 임을 확인 할 수 있다.

$$(\text{준식}) = n^2 - 4n\mathrm{E}(X) + 4\mathrm{E}(X^2) = n^2 - 2n^2 + n + n^2 = n \quad (2\text{점})$$

(2) (8점) 검은 바둑돌은 원점 혹은 $x=1$위에 있어야 하고 최대 3개까지 있을 수 있다. 원점의 검은 바둑돌의 개수를 a, $x=1$위의 검은 바둑돌의 개수를 b라고 하면 가능한 (a, b)는 $a+b \le 3$이 되는 음이 아닌 정수의 순서쌍이 되므로, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$으로 모두 10개이다. 또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다. (3점)

또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다. (2점)

한편 검은 바둑돌이 규칙 ㉠을 따라 움직이는 사건을 A라 하고 흰 바둑돌이 규칙 Ⓐ을 따라 움직이는 사건을 B라 하면, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$이므로 두 사건은 독립이다.

비슷하게 하면, 검은 바둑돌의 규칙 중 ㉠, ㉡, ㉢ 하나가 일어나는 사건과 흰 바둑돌의 규칙 중 Ⓐ와 Ⓑ가 일어나는 사건은 독립이다. 따라서 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 움직임은 서로 독립적이므로 전체 경우의 수는 $10(n+1)$가지이다. (3점)

(3) (10점) 먼저 흰 바둑돌의 위치는 주사위의 눈의 순서에 상관없이 그 횟수에 의해서만 결정되므로 조건 ①에 의해 12회 시행 직후에 흰 바둑돌은 원점에 있고 조건 ②에 의하여 x_{13}은 $2, 4, 6$중에 하나가 되어야 한다. (1점)

조건 ①로부터 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉠, ㉡, ㉢의 경우가 각각 네 번씩 일어났다는 것을 알 수 있고, 13회 시행까지 검은 바둑돌이 버려지지 않고 모두 남아 있으므로 규칙 ㉢의 경우가 되는 시행의 직전에 원점에 검은 바둑돌이 있으면 안된다. 따라서 ㉢이 시행되기 전에 검은 바둑돌 4개를 $x=1$의 위치로 옮기는 시행 (㉠)이 모두 일어나야 한다. 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉡이 ㉢과 ㉠ 사이에 일어나게 되면 검은 바둑돌을 버리게 되므로, 12회까지 가능한 경우는 아래 두 가지 중 하나이다.

(i) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡ (3점)

검은 바둑돌 1개가 12회 시행 직후에 원점의 위치에 있으므로, ㉠의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 이다.

(ii) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ (3점)

검은 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있으므로, ㉠, ㉢의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 또는 $x_{13} = 6$이다.

즉 ㉠의 자리에는 $1, 1, 4, 4$, ㉡ 의 자리에는 $2, 2, 5, 5$, ㉢의 자리에는 $3, 3, 6, 6$이 있어야 한다.
a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 개수는 6이므로, 각 경우 6^3가지이고, (2점)
구하고자 하는 답은 $3 \cdot 6^3 = 648$ 이다. (1점)