

2014학년도
수시2차 모의논술 예시문제 모범답안

자연계열



성명	
전형	
수험번호	

2014학년도 수시2차 모의논술 예시문제 모범답안

[문제 1-1]

- (1) 대칭성에 의하여, 사각형 $ABCH$ 의 무게중심은 $(2,0)$ 이고, 사각형 $DEFG$ 의 무게중심은 $(5,0)$ 이다. 두 사각형의 넓이가 같으므로 도형 $ABCDEFGH$ 의 무게중심은 $(2,0)$ 과 $(5,0)$ 의 중점인 $(3.5,0)$ 이다.
- (2) 직선 DG 는 도형 $ABCDEFGH$ 의 넓이를 이등분하지만 이 도형의 무게중심은 직선 DG 위에 있지 않다. 따라서 삼각형의 무게중심이 중선 위에 있는 것은 중선이 삼각형의 넓이를 이등분하기 때문이라는 주장은 타당하지 않다.

[문제 1-2]

- (1) G_1 의 좌표는 $(a/2, 0)$ 이다.
- (2) 삼각형 LBM 과 삼각형 NMC 는 각각 삼각형 ABC 와 닮은꼴이고, 닮음비는 $1:2$ 이다. 따라서 선분 LG_3 와 선분 NG_4 의 길이는 각각 선분 AG 의 길이 x 의 반인 $x/2$ 이다. 그런데, L 과 N 의 좌표는 각각 $((a-b)/2, -c/2)$ 와 $((a+b)/2, c/2)$ 이다. 그러므로 G_3 의 좌표는 $((a-b)/2 + x/2, -c/2)$ 이고 G_4 의 좌표는 $((a+b)/2 + x/2, c/2)$ 이다.
- (3) 삼각형 LBM 과 삼각형 NMC 의 넓이가 같으므로 G_2 는 G_3 와 G_4 의 중점이다. 따라서 G_2 의 좌표는 $((a+x)/2, 0)$ 이다.
- (4) 사각형 $ALMN$ 과 도형 S 의 넓이가 같기 때문에 삼각형 ABC 의 무게중심은 G_1 과 G_2 의 중점이다. 따라서 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는 $(a/2 + x/4, 0)$ 이다.
- (5) $x = a/2 + x/4$ 이므로 $3x/4 = a/2$, 즉 $x = 2a/3$ 이다.

[문제 1-3]

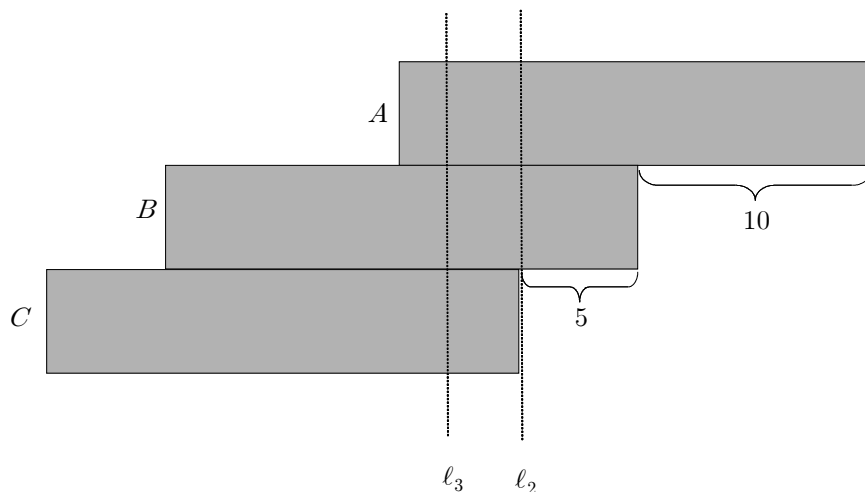
큰 원으로 둘러싸인 도형을 D , 작은 원으로 둘러싸인 도형을 E , 그리고 D 에서 E 를 제외한 도형을 S 라 하자. 그러면 D 의 무게중심의 좌표는 $(2,0)$, E 의 무게중심의 좌표는 $(1,0)$ 이다. 대칭성에 의하여 S 의 무게중심은 x 축 위에 있는데 그 좌표를 $(x,0)$ 이라 두자. D 는 E 와 S 로 이루어져 있고, E 와 S 의 넓이의 비는 $1:3$ 이다. 그러므로 D 의 무게중심은 E 의 무게중심과 S 의 무게중심을 잇는 선분을 $3:1$ 로 내분하는 점이다. 따라서

$2 = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot x}{4}$ 를 얻고 이식을 풀면 $x = 7/3$ 이므로 구하는 도형의 무게중심의 좌표는 $(7/3, 0)$ 이다.

[문제 1-4]

무게중심을 지나는 수직인 선을 무게중심선이라 하자. 벽돌 A 의 무게중심선 ℓ_1 은 A 의 대칭축이다. 벽돌 B 위에 벽돌 A 를 무너지지 않게 쌓으려면 ℓ_1 이 벽돌 B 의 오른쪽 끝보다 더 오른쪽에 있지 않아야 한다. 따라서 A 가 B 위에서 무너지지 않고 오른쪽으로 튀어 나올 수 있는 최대거리는 10cm 이다. 이때 두 벽돌 A , B 의 합체의 무게중심선 ℓ_2 는 A 와 B 의 질량이 같으므로 ℓ_1 과 B 의 무게중심선의 가운데에 위치하고 이는 B 의 오른쪽 끝에서 왼쪽으로 5cm

떨어진 위치이다. 벽돌 A , B , C 를 무너지지 않게 최대한 오른쪽으로 튀어나오게 쌓으면 아래 그림과 같다.



이때 벽돌 C 와 두 벽돌 A , B 의 합체의 질량의 비가 $1:2$ 이므로 세 벽돌 A , B , C 의 합체의 무게중심선 ℓ_3 는 벽돌 C 의 무게중심선과 ℓ_2 사이의 거리 $10cm$ 를 $2:1$ 로 나누는 위치에 있어야 한다. 따라서 ℓ_3 는 벽돌 C 의 오른쪽 끝으로부터 $10/3cm$ 왼쪽에 위치한다. 이제 벽돌 위에 세 벽돌 A , B , C 의 합체를 벽돌 D 의 오른쪽 끝에 위치하게 놓으면 되므로 구하는 최대의 길이는 $10+5+\frac{10}{3}=\frac{55}{3}$, 즉 $\frac{55}{3}cm$ 이다.

[문제 2-1]

우선

$$(*) \quad \int_0^b f^{-1}(y) dy = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y) dy + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y) dy$$

(*)의 우변 첫 번째 적분에서 $z = f^{-1}(y)$ 로 치환하면,

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(y) dy = \int_0^a z f'(z) dz \text{ 을 얻는다.}$$

한편, 부분적분법에 의하여

$$\int_0^a z f'(z) dz = af(a) - \int_0^a f(z) dz \text{ 이 성립한다.}$$

(*)에 이를 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y) dy + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y) dy \\ &= af(a) + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y) dy \end{aligned}$$

함수 f^{-1} 는 증가함수이므로

$$af(a) + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y) dy \geq af(a) + (b - f(a))a = ab$$

그러므로 부등식 $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy \geq ab$ 가 성립한다.

[문제 2-2]

함수와 역함수의 그래프를 통해 아래 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_2^5 f(x) dx - (5-2) \cdot 3 + \int_3^{17} f^{-1}(y) dy - (17-3) \cdot 2 = (5-2) \cdot (17-3)$$

따라서 $\int_3^{17} f^{-1}(y) dy = 50$ 이다.

[문제 2-3]

예제 4의 함수 $f_2(x) = x^m$ 에서 m 을 $1/2$ 로 택하면 함수 f_2 의 역함수는 $f_2^{-1}(y) = y^2$ 이다. 간

단한 적분 계산 $\int_0^a f_2(x) dx = \int_0^a x^{1/2} dx = \frac{2}{3} a^{3/2}$, $\int_0^b f_2^{-1}(y) dy = \int_0^b y^2 dy = \frac{1}{3} b^3$ 과 영의 부
등식으로부터 양의 실수 a, b 에 대한 아래 부등식을 얻는다.

$$ab \leq \frac{2}{3} a^{3/2} + \frac{1}{3} b^3$$

제시문 (나)에 따르면, 이 부등식의 등호가 성립하기 위한 필요충분조건은 $b = f_2(a)$, 즉 $a = b^2$ 이다.

[문제 2-4]

주어진 실수 x 에 대하여 $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ 을 만족하는 y 를 구하면 된다. 이 식의 양변에 e^y 를

곱하고 e^y 에 대한 이차 방정식을 풀면 $e^y > 0$ 으로부터 $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, 따라서 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 즉 역함수에 대한 식 $f_3^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 을 얻는다.

[문제 2-5]

제시문의 $f_3(x)$ 와 [문제 2-4]에서 구한 역함수 $f_3^{-1}(y)$ 에 영의 부등식을 적용한다.

우선 $\int_0^a f_3(x) dx = \frac{(e^a + e^{-a} - 2)}{2}$. 부분적분법에 의하여

$$\int_0^b f_3^{-1}(y) dy = \int_0^b \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) dy = [y \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} dy \text{ 을}$$

얻고 마지막 적분을 치환 적분으로 구하면

$$\int_0^b f_3^{-1}(y) dy = b \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) - [\sqrt{y^2 + 1}]_0^b = b \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) - \sqrt{b^2 + 1} + 1$$

영의 부등식을 적용하면

$$ab \leq \frac{e^a + e^{-a} - 2}{2} + b \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) - \sqrt{b^2 + 1} + 1$$

$p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, r = 1, s = -1, t = 0$ 으로 선택하면 부등식 (L)이 모든 양수 a, b 에 대하여 성

립하며 $b = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$ 일 때 등호가 성립한다.