

## 2015학년도 모의논술 고사

# 자연계열



성명	
전형	모의논술
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 6

---



[문제1] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 주어진 수열  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ 을 계수로 가지는 무한 급수

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ 를 수열  $\{a_n\}$ 의 **생성함수**라고 한다. 수열

$1, -1, 0, 0, 0, 0, \dots$ 의 생성함수는  $1 - 1x + 0x^2 + 0x^3 + \dots = 1 - x$ 이며 수열

$1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ 의 생성함수는  $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ 이다.

$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$ 가 수열  $\{b_n\}$ 의 생성함수이고 두 생성함수의 합을

$A(x) + B(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \dots$ 로 정의하면

$A(x) + B(x)$ 는 수열  $\{a_n + b_n\}$ 의 생성함수가 됨을 알 수 있다. 두 생성함수  $A(x)$ 와

$B(x)$ 의 곱을 다음과 같이 정의하는 것은 매우 자연스럽다:

$A(x)B(x)$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots$$

이제  $A(x)B(x)$ 는 수열  $\{a_n\}$ 과 수열  $\{b_n\}$ 에 의해서 만들어지는 새로운 수열

$\{c_n\}$ ,  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ ,의 생성함수임을 알 수 있다.

$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots) = 1 + (1-1)x + (1-1)x^2 + (1-1)x^3 + \dots = 1$ 이므로

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ 라고 표현할 수 있다.

(나) 수열  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ 은 초깃값  $a_0$ 과 함수  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , 들에 의해 정해지는

점화식  $a_n = f_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ , 이 주어지면 유일한 방법으로 결정된다.

예를 들어  $d_0 = d_1 = 1$ ,  $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ 에 의하여 수열  $\{d_n\}$ 은 완벽히

결정 된다:  $d_0 = d_1 = 1$ ,  $d_2 = d_1 + d_0 = 2$ ,  $d_3 = d_2 + d_1 = 2 + 1 = 3, \dots$

따라서 초깃값과 점화식이 같은 두 수열은 같은 수열이며 같은 생성함수를 가지게 됨을 알 수 있다.

**예제 1.** 자연수  $n$ 을 1과 2의 합으로 나타내는 방법의 수를  $d_n$ 이라고 하자. 이 때 더하는 순서가 다르면 다른 방법으로 생각한다. 예를 들어  $n = 4$ 이면 다음 다섯 가지 서로 다른 방법이 존재 한다:  $1 + 1 + 1 + 1$ ,  $1 + 1 + 2$ ,  $1 + 2 + 1$ ,  $2 + 1 + 1$ ,  $2 + 2$ . 따라서  $d_4 = 5$ 이다. 수열  $\{d_n\}$ 의 점화식을 구해보자.  $n$ 을 1과 2의 합으로 나타내는 방법은 그 첫 번째 수가 1인 경우와 2인 경우로 나누어 생각해볼 수 있으며 첫 수가 1이면 나머지 수들은 그 합이  $n-1$  그리고 첫 수가 2이면 나머지 수들은 그 합이  $n-2$ 가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서  $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ ,  $n \geq 3$ ,이 성립하며 편의상  $d_0 = 1$ 이라 약속하면  $d_2 = d_1 + d_0$ 도 성립한다.

(1) 이제 수열  $\{d_n\}$ 의 생성함수를  $D(x)$ 라고 하면  $\{d_n\}$ 이 만족하는 점화식을 적절히 사용하여 다음과 같은 계산을 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 D(x) &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots \\
 &= 1 + x + (d_1 + d_0)x^2 + (d_2 + d_1)x^3 + \cdots \\
 &= 1 + x + (d_1x^2 + d_2x^3 + d_3x^4 + \cdots) + (d_0x^2 + d_1x^3 + d_2x^4 + \cdots) \\
 &= 1 + x + (xD(x) - d_0x) + x^2D(x)
 \end{aligned}$$

따라서  $D(x)(1 - x - x^2) = 1$  이며,  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  일 때,

$$\begin{aligned}
 D(x) &= \frac{1}{(1 - x - x^2)} = \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}x} \left( \frac{1}{(1 - \alpha x)} - \frac{1}{(1 - \beta x)} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}x} ((1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots) - (1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \cdots))
 \end{aligned}$$

이 된다. 그리고  $D(x)$ 에서  $x^n$ 의 계수를 읽으면  $d_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$  이 된다.

(2) 점화식  $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}, n \geq 2$ , 을 다른 방법으로 생각해보자.

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} = 0d_n + 1d_{n-1} + 1d_{n-2} + 0d_{n-3} + \cdots + 0d_0 \text{ 이므로}$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = \cdots = 0 \text{ 이라하면 } d_n = \sum_{i=0}^n a_i d_{n-i}, n \geq 2, \text{ 가}$$

만족된다. 따라서 수열  $\{a_n\}$ 의 생성함수는  $A(x) = x + x^2$  이며 생성함수의 곱의 규칙에 의하여

$$\begin{aligned}
 D(x) &= d_0 + d_1x + (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0)x^2 + (a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_3d_0)x^3 + \cdots \\
 &= d_0 + d_1x - (a_0d_0) - (a_0d_1 + a_1d_0)x \\
 &\quad + (a_0d_0) + (a_0d_1 + a_1d_0)x + (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0)x^2 + (a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_3d_0)x^3 + \cdots \\
 &= 1 + x - x + A(x)D(x) = 1 + (x + x^2)D(x)
 \end{aligned}$$

이며 (1)에서와 같이  $D(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$  이 된다.

**예제 2.** 다섯 개의 수  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ 를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 구해보자.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 를 계산하는 순서는 괄호를 이용하면 자연스럽게 정해진다.

예를 들어  $(x_1 + x_2) + (x_3 + (x_4 + x_5))$ 는  $(x_1 + x_2)$ 와  $(x_3 + (x_4 + x_5))$ 를 더하는 일을 마지막에 해야 함을 뜻한다. 덧셈기호 양쪽의 값을 계산하는 순서는 덧셈기호의 왼쪽을 먼저 계산하는 것으로 정하면  $(x_1 + x_2)$ 을 먼저 계산하고  $(x_3 + (x_4 + x_5))$ 를 계산한 후에 두수의 합을 계산하면 된다.

$n$ 개의 수  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를  $e_n$ 이라고 한다면 우리가 구하고자 하는 수는  $e_5$ 이며,  $e_1 = 1$ 로 약속하면 마지막으로 실행하는 덧셈의 위치에 따라  $e_5 = e_1e_4 + e_2e_3 + e_3e_2 + e_4e_1$ 로 쓸 수 있음을 알 수 있다. 이 때  $e_0 = 0$

이라 하면  $n \geq 2$ 일 때  $e_n = \sum_{i=0}^n e_i e_{n-i}$ 이 성립한다. 따라서  $E(x)$ 을 수열  $\{e_n\}$ 의

생성함수라 하면  $E(x)$ 가 만족하는 식을 얻을 수 있다.



## 2015학년도 모의논술고사

자연계열

[문제 1-1] <20점> 자연수  $n$ 에 대하여, 길이가  $n$ 인 0과 1의 나열방법의 수를  $a_n$ 이라 하자. 그리고  $a_n$  개의 가능한 나열 중에서 1이 연달아서 나타나지 않는 방법의 수를  $b_n$ 이라 하자.

- 1) <5점>  $n \geq 1$  일 때  $a_n$ 을 계산하라.
- 2) <15점> 편의상  $b_0 = 1$  이라 하였을 때, 수열  $\{b_n\}$ 이 만족하는 점화식과 생성함수를 찾으라.

[문제 1-2] <15점>  $X(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  를 수열  $1, 1, 1, 1, 1, \dots$  의 생성함수라 하자.  $\{d_n\}$ 은 예제 1에서 소개한 수열이며 수열  $\{w_n\}$ 은  $w_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n$  을 만족한다고 할 때,  $\{w_n\}$ 의 생성함수를  $\{d_n\}$ 의 생성함수  $D(x)$ 와  $X(x)$ 를 이용하여 나타내라.

[문제 1-3] <15점> 예제 1의 (2)번 방법을 참조하여 예제 2의 수열  $\{e_n\}$ 의 생성함수  $E(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \dots$  가 만족하는 식을 찾으라.

[문제2] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

### (가) 정적분에 관한 가중 평균값의 정리

**정리 1.** 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속인 두 함수  $F, G$ 를 생각하자. 그리고  $G$ 는 구간 전체에서 부호가 바뀌지 않는다고 가정하자. 그러면, 다음 식을 만족하는 점  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$  안에 존재한다.

$$\int_a^b F(x) G(x) dx = F(c) \int_a^b G(x) dx$$

**정리 1**은 연속함수의 대표적인 성질인 중간값의 정리를 이용하여 증명할 수 있으며, 정적분에 관한 평균값의 정리는 **정리 1**에서  $G$ 가 상수함수 1인 특수한 경우이다.

**예제 1.** 정리 1에서  $a = 0, b = \pi, F(x) = x, G(x) = \sin x$ 인 경우를 생각해보자.

$\int_0^\pi x \sin x dx = \pi, \int_0^\pi \sin x dx = 2$  이므로  $c = \frac{\pi}{2}$ 로 택하면 위의 등식이 성립한다.

### (나) 수치적 구적법

정적분을 계산할 때 원시 함수를 구체적으로 구하기 어려워 정확한 값을 얻을 수 없는 경우가 흔히 발생한다. 정적분  $\int_a^b f(x) dx$ 의 값을 근사하는데 자주 사용하는 방법으로 수치적 구적법(numerical quadrature)을 들 수 있으며, 이는 적당한 점  $x_1, \dots, x_n$ 과 적당한 수  $a_1, \dots, a_n$ 를 이용하여

$$\sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$$

형태로 나타낸다.

#### 예제 2. 중점 규칙 (Midpoint rule)

가장 간단한 수치적 구적법으로 중점 규칙을 들 수 있다.

$$M(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

#### 예제 3. 사다리꼴 규칙 (Trapezoid rule)

정적분의 값을 구간의 양 끝점에서의 함수값으로 근사하는 가장 간단한 방법은 그림 1에 나타난 것과 같은 사다리꼴 규칙이다.

$$T(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

사다리꼴 규칙은 다음 정리와 밀접한 관계가 있다.

**정리 2.** 닫힌구간  $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 정의된 두 번 미분 가능한 함수  $f$ 를 생각하자. 이계도함수  $f''$ 이  $[a, b]$ 에서 연속이면,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

을 만족하는 점  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 존재한다.

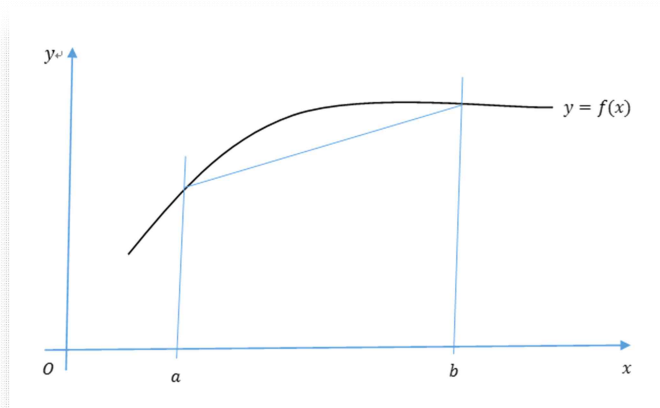


그림 1. 사다리꼴 규칙

(다) **정확도** 주어진 구적법의 정확도(degree of accuracy)는 0 이상  $n$  이하의 모든  $k$ 에 대하여 함수  $x^k$ 의 구적법에 의한 근사값과 적분값이 같아지는  $n$  중 가장 큰 값을 의미한다.

**예제 4.**  $a=0$ ,  $b=1$ 이라 하고 **예제 2**에서와 같이 중점 규칙으로 정적분을 근사하는 경우를 생각해 보자. 우선,  $\int_0^1 1 dx = 1 = M(1)$ ,  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = M(x)$ 이다. 하지만  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = M(x^2)$ 이므로 중점 규칙은 정확도 1을 가짐을 알 수 있다.

**예제 5.**  $a=0$ ,  $b=1$ 이라 하고 **예제 3**에서와 같이 사다리꼴 규칙으로 정적분을 근사하는 경우,  $\int_0^1 1 dx = 1 = \frac{1}{2} [1+1] = T(1)$ ,  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [0+1] = T(x)$ 이 성립한다. 하지만  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} [0+1] = T(x^2)$ 이므로 사다리꼴 법칙은 정확도 1을 가짐을 알 수 있다. 한편 **정리 2**를 이용하여 사다리꼴 규칙의 정확도가 1임을 확인할 수도 있다. 1차 이하의 다항 함수의 이계도함수가 0이므로 정확도는 1 이상이고, 2차 다항식의 이계도함수는 0이 아닌 상수이므로 오차가 0일 수 없어 정확도는 1이하가 되기 때문이다.



[문제 2-1] <15점> 제시문 (가)의 정리 1을  $a=0$ ,  $b=\pi$ ,  $F(x) = \cos(\cos x)$ ,  $G(x) = \sin x$ 에 적용할 때  $\cos c$ 의 값은 얼마인가?

[문제 2-2] <20점> 사다리꼴 규칙에 대한 다음 물음에 답하라.

- 1) <10점>  $p(a) = p(b) = 0$ ,  $-p'(a) = p'(b) = b - a$ 를 만족하는 최고차항의 계수가 1인 이차 다항식  $p(x)$ 를 구하고, 부분적분 공식을 적절히 적용하여  $\int_a^b f(x)dx$ 를  $T(f)$ 와  $\int_a^b f''(x)p(x)dx$ 를 이용하여 나타내라.
- 2) <10점> 정리 2를 증명하라.

[문제 2-3] <15점> 자연수  $n$ 에 대하여  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 를 근사하는 다음과 같은 수치적 구적법을 생각하자.

$$\frac{n}{n+1}f(-\alpha) + (1-t) \cdot f(0) + \frac{n}{n+1}f(\beta)$$

이 구적법이 가장 높은 정확도를 갖도록 하는 음이 아닌 실수  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t$ 를 각각  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $t_n$ 이라 하고, 이때의 정확도를  $r_n$ 이라 할 때 아래 극한 값을 구하라.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n t_n r_n$$