

2015학년도 모의논술 고사

의학계열



성명	
전형	모의논술
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 :4



[문제1] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 주어진 수열 a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ 을 계수로 가지는 무한 급수

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ 를 수열 $\{a_n\}$ 의 **생성함수**라고 한다. 수열

$1, -1, 0, 0, 0, 0, \dots$ 의 생성함수는 $1 - 1x + 0x^2 + 0x^3 + \dots = 1 - x$ 이며 수열

$1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ 의 생성함수는 $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ 이다.

$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$ 가 수열 $\{b_n\}$ 의 생성함수이고 두 생성함수의 합을

$A(x) + B(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \dots$ 로 정의하면

$A(x) + B(x)$ 는 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 생성함수가 됨을 알 수 있다. 두 생성함수 $A(x)$ 와

$B(x)$ 의 곱을 다음과 같이 정의하는 것은 매우 자연스럽다:

$A(x)B(x)$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots$$

이제 $A(x)B(x)$ 는 수열 $\{a_n\}$ 과 수열 $\{b_n\}$ 에 의해서 만들어지는 새로운 수열

$\{c_n\}$, $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$,의 생성함수임을 알 수 있다.

$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots) = 1 + (1-1)x + (1-1)x^2 + (1-1)x^3 + \dots = 1$ 이므로

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ 라고 표현할 수 있다.

(나) 수열 a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ 은 초깃값 a_0 과 함수 f_n , $n \geq 1$, 들에 의해 정해지는

점화식 $a_n = f_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, $n \geq 1$,이 주어지면 유일한 방법으로 결정된다.

예를 들어 $d_0 = d_1 = 1$, $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $n \geq 2$ 에 의하여 수열 $\{d_n\}$ 은 완벽히

결정된다: $d_0 = d_1 = 1$, $d_2 = d_1 + d_0 = 2$, $d_3 = d_2 + d_1 = 2 + 1 = 3, \dots$

따라서 초깃값과 점화식이 같은 두 수열은 같은 수열이며 같은 생성함수를 가지게 됨을 알 수 있다.

예제 1. 자연수 n 을 1과 2의 합으로 나타내는 방법의 수를 d_n 이라고 하자. 이 때 더하는 순서가 다르면 다른 방법으로 생각한다. 예를 들어 $n=4$ 이면 다음 다섯 가지 서로 다른 방법이 존재한다: $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $2+2$.

따라서 $d_4 = 5$ 이다. 수열 $\{d_n\}$ 의 점화식을 구해보자. n 을 1과 2의 합으로 나타내는 방법은 그 첫 번째 수가 1인 경우와 2인 경우로 나누어 생각해볼 수 있으며 첫 수가 1이면 나머지 수들은 그 합이 $n-1$ 그리고 첫 수가 2이면 나머지 수들은 그 합이 $n-2$ 가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $n \geq 3$,이 성립하며 편의상 $d_0 = 1$ 이라 약속하면 $d_2 = d_1 + d_0$ 도 성립한다.

(1) 이제 수열 $\{d_n\}$ 의 생성함수를 $D(x)$ 라고 하면 $\{d_n\}$ 이 만족하는 점화식을 적절히 사용하여 다음과 같은 계산을 할 수 있다.



$$\begin{aligned} D(x) &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + (d_1 + d_0)x^2 + (d_2 + d_1)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + (d_1x^2 + d_2x^3 + d_3x^4 + \cdots) + (d_0x^2 + d_1x^3 + d_2x^4 + \cdots) \\ &= 1 + x + (xD(x) - d_0x) + x^2D(x) \end{aligned}$$

따라서 $D(x)(1-x-x^2)=1$ 이며, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{(1-x-x^2)} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}x} \left(\frac{1}{(1-\alpha x)} - \frac{1}{(1-\beta x)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}x} ((1+\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots) - (1+\beta x+\beta^2x^2+\cdots)) \end{aligned}$$

이 된다. 그리고 $D(x)$ 에서 x^n 의 계수를 읽으면 $d_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$ 이 된다.

(2) 점화식 $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}, n \geq 2$, 을 다른 방법으로 생각해보자.

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} = 0d_n + 1d_{n-1} + 1d_{n-2} + 0d_{n-3} + \cdots + 0d_0 \text{ 이므로}$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = \cdots = 0 \text{ 이라하면 } d_n = \sum_{i=0}^n a_i d_{n-i}, n \geq 2, \text{ 가}$$

만족된다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 생성함수는 $A(x) = x + x^2$ 이며 생성함수의 곱의 규칙에 의하여

$$\begin{aligned} D(x) &= d_0 + d_1x + (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0)x^2 + (a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_3d_0)x^3 + \cdots \\ &= d_0 + d_1x - (a_0d_0) - (a_0d_1 + a_1d_0)x \\ &\quad + (a_0d_0) + (a_0d_1 + a_1d_0)x + (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0)x^2 + (a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_3d_0)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x - x + A(x)D(x) = 1 + (x + x^2)D(x) \end{aligned}$$

이며 (1)에서와 같이 $D(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ 이 된다.

예제 2. 다섯 개의 수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 구해보자.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 를 계산하는 순서는 괄호를 이용하면 자연스럽게 정해진다.

예를 들어 $(x_1 + x_2) + (x_3 + (x_4 + x_5))$ 는 $(x_1 + x_2)$ 와 $(x_3 + (x_4 + x_5))$ 를 더하는 일을 마지막에 해야 함을 뜻한다. 덧셈기호 양쪽의 값을 계산하는 순서는 덧셈기호의 왼쪽을 먼저 계산하는 것으로 정하면 $(x_1 + x_2)$ 을 먼저 계산하고 $(x_3 + (x_4 + x_5))$ 를 계산한 후에 두수의 합을 계산하면 된다.

n 개의 수 x_1, x_2, \dots, x_n 를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 e_n 이라고 한다면 우리가 구하고자 하는 수는 e_5 이며, $e_1 = 1$ 로 약속하면 마지막으로 실행하는 덧셈의 위치에 따라 $e_5 = e_1e_4 + e_2e_3 + e_3e_2 + e_4e_1$ 로 쓸 수 있음을 알 수 있다. 이 때 $e_0 = 0$

이라 하면 $n \geq 2$ 일 때 $e_n = \sum_{i=0}^n e_i e_{n-i}$ 이 성립한다. 따라서 $E(x)$ 을 수열 $\{e_n\}$ 의

생성함수라 하면 $E(x)$ 가 만족하는 식을 얻을 수 있다.



2015학년도 모의논술고사

의학계열

[문제 1-1] <20점> 자연수 n 에 대하여, 길이가 n 인 0과 1의 나열방법의 수를 a_n 이라 하자. 그리고 a_n 개의 가능한 나열 중에서 1이 연달아서 나타나지 않는 방법의 수를 b_n 이라 하자.

1) <5점> $n \geq 1$ 일 때 a_n 을 계산하라.

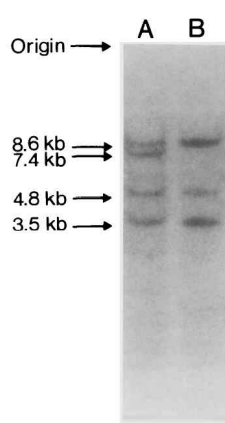
2) <15점> 편의상 $b_0 = 1$ 이라 하였을 때, 수열 $\{b_n\}$ 이 만족하는 점화식과 생성함수를 찾으라.

[문제 1-2] <15점> $X(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ 를 수열 $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ 의 생성함수라 하자. $\{d_n\}$ 은 예제 1에서 소개한 수열이며 수열 $\{w_n\}$ 은 $w_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n$ 을 만족한다고 할 때, $\{w_n\}$ 의 생성함수를 $\{d_n\}$ 의 생성함수 $D(x)$ 와 $X(x)$ 를 이용하여 나타내라.

[문제 1-3] <15점> 예제 1의 (2)번 방법을 참조하여 예제 2의 수열 $\{e_n\}$ 의 생성함수 $E(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \dots$ 가 만족하는 식을 찾으라.

[문제2] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

5만개이하의 유전자를 가지고 있음에도 불구하고 인간의 면역계는 10^{12} 개 이상의 다른 항체를 만들 수 있다. 다음은 한정된 유전자로 다양한 항체를 만들 수 있는 기전의 일부를 밝힌 도네가와 연구팀의 연구 결과 중 일부이다 (Cell, 15권, 1-14, 1978)



생쥐의 배아로부터 추출한 게놈 DNA (B)와 항체의 짧은 사슬을 생산하는 형질세포에서 유래한 암세포의 게놈 DNA (A)를 제한효소 EcoRI으로 자른 후, 전기영동하였다. 여기에 동위원소로 표지 시킨 항체의 짧은 사슬의 cDNA를 접합한 다음 자기 방사법으로 방사능을 현상하였다.

[문제 2-1] <12.5점> 실험결과를 설명하고 실험자가 증명하고자 하는 항체 다양성의 기전을 설명하시오.

[문제 2-2] <12.5점> 인간과 쥐는 동일한 기능을 하는 염색체를 이배체($2n$)로 가지고 있다. 이를 바탕으로 그림의 A 레인 결과가 보여주는 항체 유전자 발현 특징을 설명하시오.

[문제 2-3] <12.5점> 후천성 면역반응의 특징을 설명하시오.

[문제 2-4] <12.5점> 단일클론항체의 정의와 제조법을 설명하시오.